

# Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

## 2014 - 2.<sup>a</sup> Fase

### Proposta de resolução

1.

1.1. Aplicando o método de Hondt na distribuição dos 15 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451
Divisão por 1	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451
Divisão por 2	$\frac{22\,010}{2} = 11\,005$	$\frac{17\,124}{2} = 8562$	$\frac{15\,144}{2} = 7572$	$\frac{12\,333}{2} = 6166,5$	$\frac{11\,451}{2} = 5725,5$
Divisão por 3	$\frac{22\,010}{3} \approx 7336,7$	$\frac{17\,124}{3} = 5708$	$\frac{15\,144}{3} = 5048$	$\frac{12\,333}{3} = 4111$	$\frac{11\,451}{3} = 3817$
Divisão por 4	$\frac{22\,010}{4} = 5502,5$	$\frac{17\,124}{4} = 4281$	$\frac{15\,144}{4} = 3786$		
Divisão por 5	$\frac{22\,010}{5} = 4402$				
Divisão por 6	$\frac{22\,010}{6} \approx 3668,3$				

Aplicando o método de Saint-Laguë na distribuição dos 15 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451
Divisão por 1	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451
Divisão por 3	$\frac{22\,010}{3} \approx 7336,7$	$\frac{17\,124}{3} = 5708$	$\frac{15\,144}{3} = 5048$	$\frac{12\,333}{3} = 4111$	$\frac{11\,451}{3} = 3817$
Divisão por 5	$\frac{22\,010}{5} = 4402$	$\frac{17\,124}{5} = 3424,8$	$\frac{15\,144}{5} = 3028,8$	$\frac{12\,333}{5} = 2466,6$	$\frac{11\,451}{5} = 2290,2$
Divisão por 7	$\frac{22\,010}{7} \approx 3144,3$	$\frac{17\,124}{7} \approx 2446,3$	$\frac{15\,144}{7} \approx 2163,4$	$\frac{12\,333}{7} \approx 1761,9$	
Divisão por 9	$\frac{22\,010}{9} \approx 2445,6$				

Assim, os números de mandatos atribuídos às listas dos cinco partidos mais votados no círculo eleitoral de Penha Alta resultantes da aplicação do método de Hondt e da aplicação do método de Saint-Laguë, estão assinalados na tabela seguinte:

Partido	A	B	C	D	E
n.º de mandatos Método de Hondt	5	3	3	2	2
n.º de mandatos Método de Saint-Laguë	4	3	3	3	2



Desta forma, podemos concluir que, as diferenças na atribuição dos mandatos pelos métodos de Hondt e de Saint-Laguë, consistem essencialmente num número de mandatos mais homogéneo entre os partidos na atribuição pelo método de Saint-Laguë.

Assim, deixar de utilizar o método de Hondt e passar a utilizar o método de Saint-Laguë implicaria que o partido A teria menos 1 mandato e o partido D teria mais 1 mandato.

1.2. Aplicando o método A, temos:

		150 votos	180 votos	100 votos	Pontuação	Vencedor
Castanho	1ª Pref.	Castanho	Amarelo	Castanho	Castanho $150 + 100 = 250$	Castanho
Amarelo	2ª Pref.	Amarelo	Castanho	Amarelo	Amarelo 180	
Castanho	1ª Pref.	Castanho	Vermelho	Castanho	Castanho $150 + 100 = 250$	Castanho
Vermelho	2ª Pref.	Vermelho	Castanho	Vermelho	Vermelho 180	

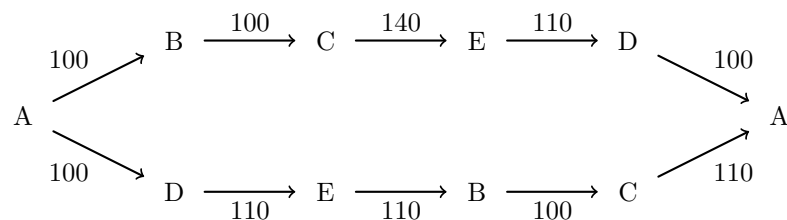
Como o castanho venceu as comparações com as restantes cores é a cor vencedora, usando o método A.

Aplicando o método B, temos:

- Pontuação da cor «Castanho»:  $3 \times 150 + 1 \times 180 + 3 \times 100 = 930$
- Pontuação da cor «Amarelo»:  $2 \times 150 + 3 \times 180 + 1 \times 100 = 1140$
- Pontuação da cor «Vermelho»:  $1 \times 150 + 2 \times 180 + 2 \times 100 = 710$

Como o amarelo tem maior número de pontos é a cor escolhida, usando o método B, o que prova que o Manuel tem razão.

2. Definindo os circuitos possíveis compatíveis com o algoritmo definido, considerando a escolha aleatória da primeira vivenda (B ou D), temos:



Assim, temos que a distância total de cada percurso é:

- Percurso  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$ :  $100 + 100 + 140 + 110 + 100 = 550$  metros
- Percurso  $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ :  $100 + 110 + 110 + 100 + 110 = 530$  metros

Logo, aplicando o algoritmo, a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário se optar pela vivenda B na primeira escolha.



3.

- 3.1. Como o dia 1 de junho de 2000 corresponde a  $t = 0$ , pelo que o número de habitantes de Peso nesta data é:

$$P(0) = 1800 \times e^{0,05 \times 0} = 1800 \times 1 = 1800$$

Assim, temos que a população duplica quando atingir o valor

$$2 \times P(0) = 2 \times 1800 = 3600$$

Inserimos na calculadora gráfica o modelo que dá a variação da população de Peso ( $y = 1800 \times e^{0,05x}$ ), e visualizamos a tabela de valores da função, procurando o primeiro valor superior a 3600, como está reproduzida na figura ao lado.

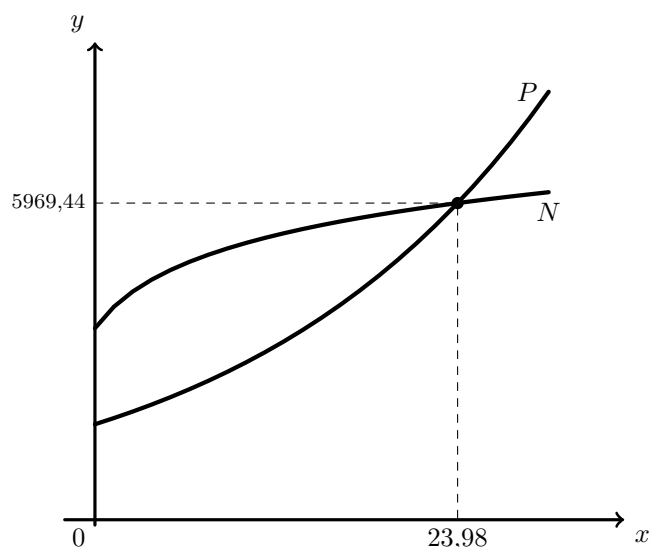
Assim, podemos verificar que o primeiro valor de  $t$ , para o qual se obtém uma população superior a 3600 é 14, ou seja, podemos concluir que 14 anos após o dia 1 de junho de 2000, o número de habitantes de Peso venha a duplicar.

X	Y1
10	2967,7
11	3119,9
12	3279,8
13	3448
14	3624,8
15	3810,6
16	4006

- 3.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação dos populações de Peso e Neiva em função do tempo ( $y = 1800 \times e^{0,05x}$  e  $y = 2000 + 1000 \ln(2x + 5)$ ), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja,  $0 \leq x \leq 30$  e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja,  $0 \leq y < 9000$ , obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (com duas casas decimais) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que a população das duas cidades é igual, isto é, o ponto de coordenadas (23,98 ; 5969,44)

Assim, pela observação do gráfico, podemos verificar que o número mínimo de anos ao fim dos quais se estima que o número de habitantes de Peso seja superior ao número de habitantes de Neiva, com arredondamento às unidades, é 24 anos.



- 3.3. Inserindo na calculadora gráfica as listas com os dados relativos aos anos ( $x$ ) e à população ( $y$ ), temos:

<b>t</b> ( $x$ )	<b>R</b> ( $y$ )
0	632
1	894
2	1144
3	1407
4	1665
5	1920
6	2183

Desta forma, determinando a regressão linear para estes dados, obtemos os valores de  $a$  e de  $b$ , aproximados com duas casas decimais:  $a \approx 258,07$  e  $b \approx 632,21$

Assim temos que o modelo para a população de Runa é:

$$R(t) = 258,07t + 632,21$$

Desta forma no dia 1 de junho de 2012, ou seja, 12 anos após o dia 1 de junho de 2000, a população de Runa, arredondada às unidades, é:

$$R(12) = 258,07 \times 12 + 632,21 \approx 3729 \text{ habitantes}$$

4.

- 4.1. Observando o histograma das frequências absolutas acumuladas e escrevendo os dados numa tabela obtemos a coluna apresentada a sombreado na tabela seguinte.

A partir da frequência absoluta acumulada é possível obter a coluna da frequência absoluta simples, por subtrações sucessivas, também apresentada na tabela seguinte.

Fazendo a divisão de cada frequência absoluta simples pelo total de saquetas podemos obter as frequências relativas simples, e finalmente, por somas sucessivas, podemos obter as frequências absolutas acumuladas:

Massa de açúcar na saqueta (g)	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
<b>[5,8;5,9[</b>	24	24	$\frac{24}{60} = 0,4$	0,4
<b>[5,9;6,0[</b>	$36 - 24 = 12$	36	$\frac{12}{60} = 0,2$	$0,4 + 0,2 = 0,6$
<b>[6,0;6,1[</b>	$54 - 36 = 18$	54	$\frac{18}{60} = 0,3$	$0,6 + 0,3 = 0,9$
<b>[6,1;6,2[</b>	$57 - 54 = 3$	57	$\frac{3}{60} = 0,05$	$0,9 + 0,05 = 0,95$
<b>[6,2;6,3[</b>	$60 - 57 = 3$	60	$\frac{3}{60} = 0,05$	$0,95 + 0,05 = 1$
Total	60	—	1	—



- 4.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de saquetas por caixa, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, o número de caixas:

Número de saquetas de açúcar por caixa	Frequência absoluta simples (Número de caixas)
693	1
714	1
735	2
756	3
819	5
840	8

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor do número médio de saquetas por caixa da amostra:

$$\bar{x} \approx 798,38$$

Assim, como o valor esperado era de 760 saquetas, devem ser retiradas  $798 - 760 = 38$  saquetas de cada caixa, e desta forma, como se retiram o mesmo número de saquetas de açúcar a cada uma das caixas da amostra, a média será

$$\bar{x} \approx 798,38 - 38 \approx 760 \text{ saquetas}$$

- 4.3. Pretendemos determinar a dimensão da amostra (admitindo que é superior a 30) para um intervalo de confiança, do qual conhecemos:

- A proporção de pacotes de açúcar, de uma caixa de 6 quilogramas que têm 8 ou mais gramas (52%):  $\hat{p} = 0,52$
- O valor de  $z$  para um nível de confiança de 95%:  $z = 1,960$
- A amplitude do intervalo: 0,20

Assim, como a amplitude do intervalo de confiança  $\left( \left[ \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \right)$ , é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left( \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Substituindo os valores conhecidos podemos determinar o valor de  $n$ :

$$2(1,960)\sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{n}} = 0,20 \Leftrightarrow 3,92 \times \sqrt{\frac{0,2496}{n}} = 0,20$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão  $y = 3,92 \times \sqrt{\frac{0,2496}{x}}$ , e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de  $x$  a que corresponde o valor mais próximo de 0,20, ou seja,  $x = 96$

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para que a amplitude do intervalo seja aproximadamente 0,20 é:

$$n = 96$$

X	Y1
92	0,2042
93	0,2031
94	0,2020
95	0,2009
96	0,1998
97	0,1986
98	0,1978



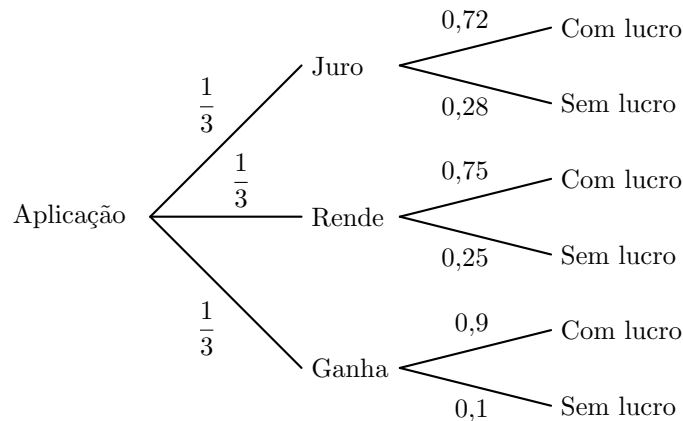
5.

5.1. Como a probabilidade de lucro de uma aplicação financeira é 0,90 se pertence ao banco Ganha, a probabilidade de não obter lucro neste banco é  $1 - 0,9 = 0,1$

Logo, como nesse dia, foram feitas 3500 aplicações financeiras pela seguradora no banco Ganha, o número dessas aplicações financeiras que se estima que não obtenham lucro é:

$$3500 \times 0,1 = 350 \text{ aplicações}$$

5.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma aplicação financeira, e os acontecimentos:

$J$ : «A aplicação pertence ao banco Juro»

$R$ : «A aplicação pertence ao banco Rende»

$G$ : «A aplicação pertence ao banco Ganha»

$L$ : «A aplicação teve lucro»

Temos, que a probabilidade de a aplicação financeira pertencer ao banco JURO, sabendo que a aplicação financeira obteve lucro, na forma de fração irredutível, é:

$$\begin{aligned} P(J|L) &= \frac{P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{P(J \cap L)}{P(J \cap L) + P(R \cap L) + P(G \cap L)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0,72}{\frac{1}{3} \times 0,72 + \frac{1}{3} \times 0,75 + \frac{1}{3} \times 0,9} = \frac{0,24}{0,79} = \frac{24}{79} \end{aligned}$$

5.3. Como a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal de valor médio igual a  $\mu$ , então  $P(X > \mu) = 0,5$ , e como  $P(X > b) = 0,17$ , temos que:

$$P(\mu < X < b) = 0,5 - 0,17 = 0,33$$

E assim, como  $P(a < X < \mu) = 0,12$ , vem que:

$$P(a < X < b) = P(a < X < \mu) + P(\mu < X < b) = 0,12 + 0,33 = 0,45$$

