Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2015, Época especial)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método de Hondt na distribuição dos 9 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	10 918	5947	2022	1483	660
Divisão por 1	10 918	5947	2022	1483	660
Divisão por 2	$\frac{10\,918}{2} = 5459$	$\frac{5947}{2} = 2973{,}5$	$\frac{2022}{2} = 1011$		
Divisão por 3	$\frac{10\,918}{3} \approx 3639{,}3$	$\frac{5947}{3} \approx 1982{,}3$			
Divisão por 4	$\frac{10\,918}{4} = 2729{,}5$	$\frac{5947}{4} \approx 1486{,}8$			
Divisão por 5	$\frac{10\,918}{5} = 2183{,}6$				
Divisão por 6	$\frac{10\,918}{5} \approx 1819{,}7$				

Aplicando o método de Hamilton na distribuição dos 9 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	10 918	5947	2022	1483	660
Total de votos	$10\,918 + 5947 + 2022 + 1483 + 660 = 21\,030$				
Divisor padrão	$\frac{21\,030}{9} \approx 2336{,}667$				
Quota padrão	$\frac{10\,918}{2336{,}667} \approx$ $\approx 4{,}672$	$\frac{5947}{2336{,}667} \approx$ $\approx 2{,}545$	$\frac{2022}{2336{,}667} \approx$ $\approx 0{,}865$	$\frac{1483}{2336{,}667} \approx$ $\approx 0{,}635$	$\frac{660}{2336{,}667} \approx$ $\approx 0{,}282$
1.ª atribuição	4	2	0	0	0
Mandatos atribuídos	$4 + 2 + 0 + 0 + 0 = 6$				
2.ª atribuição	1	0	1	1	0
Total de mandatos	$4 + 1 = 5$	$2 + 0 = 2$	$0 + 1 = 1$	$0 + 1 = 1$	$0 + 0 = 0$

Assim, o número de mandatos do executivo da Câmara Municipal, distribuídos pelo Método de Hondt e pelo Método de Hamilton, estão assinalados na tabela seguinte:

Partido	A	B	C	D	E
n.º de mandatos Método de Hondt	5	3	1	0	0
n.º de mandatos Método de Hamilton	5	2	1	1	0

Desta forma, podemos concluir que a Maria tem razão, porque se fosse aplicado o método de Hamilton, o partido D ficaria representado no executivo (com 1 mandato), o que não acontece porque o método usado é o de Hondt.

2.

2.1. Aplicando o método descrito para determinar como serão distribuídos os tipos de lugares que cada agência pode vender, temos:

Agência / **Tipo de lugar**	Ago	Behind	Extra-legroom	Normal	Up-front	XL
NETVOA (NV)	22	26	6	33	8	5
VOARSEMPRE (VS)	18	21	1	55	1	4

Atribuição temporária	NV	NV	NV	VS	NV	NV
Soma temporária	NV: 22+26+6+8+5= 67 pts VS: 55 pts					
Agência com mais pontos	NETVOA (NV)					
Quocientes	$\frac{22}{18} \approx 1{,}22$	$\frac{26}{21} \approx 1{,}24$	$\frac{6}{1} = 6$	—	$\frac{8}{1} = 8$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$
Segunda atribuição	VS	NV	NV	VS	NV	NV
Segunda soma	NV: 26+6+8+5= 45 pts VS: 18+55=73 pts					
Soma com a transferência de x% de lugares AGO	NV: $67 - \frac{x}{100} \times 22$ pts VS: $55 + \frac{x}{100} \times 18$ pts					

Igualando as duas somas e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

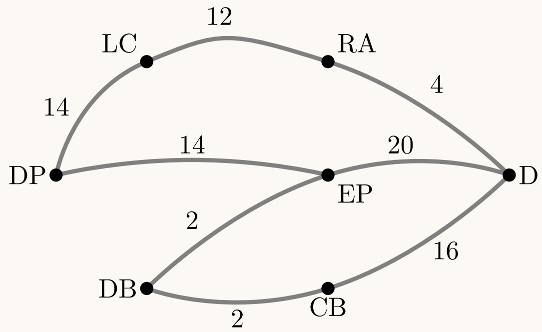
$$67 - \frac{x}{100} \times 22 = 55 + \frac{x}{100} \times 18 \Leftrightarrow 67 - \frac{x \times 22}{100} = 55 + \frac{x \times 18}{100} \Leftrightarrow 67 - 0{,}22x = 55 + 0{,}18x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 67 - 55 = 0{,}18x + 0{,}22x \Leftrightarrow 12 = 0{,}4x \Leftrightarrow \frac{12}{0{,}4} = x \Leftrightarrow x = 30$$

Ou seja, devem ser transferidos 30% dos lugares *Ago* da agência NETVOA para a agência VOARSEMPRE, pelo que os lugares que cada agência pode vender são:

- NETVOA: 70% dos lugares do tipo *Ago* e todos os lugares dos tipos *Behind*, *Extra-legroom*, *Up-front* e XL.
- VOARSEMPRE: 30% dos lugares do tipo *Ago* e todos os lugares do tipo *Normal*.

2.2. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma tarefa e cada aresta representa uma relação de precedência. A ponderação, em cada aresta representa o tempo necessário para a execução da tarefa da esquerda (e o tempo de espera necessário para a tarefa da direita).



Assim podemos verificar que podem ocorrem quatro sequências de tarefas:

- DP $\rightarrow$ LC $\rightarrow$ RA $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $14 + 12 + 4 = 30$ minutos
- DP $\rightarrow$ EP $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $14 + 20 = 34$ minutos
- DB $\rightarrow$ EP $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $2 + 20 = 22$ minutos
- DB $\rightarrow$ CB $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $2 + 16 = 18$ minutos

Como cada uma das sequências de tarefas pode decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova descolagem do avião, nas condições previstas na tabela anterior é 34 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da sequência com maior duração.

2.3. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 220$
- A proporção amostral das viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos: $\hat{p} = \frac{11}{220} = 0{,}05$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos, nas ligações Lisboa-Faro $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left] 0{,}05 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{220}} \, ; \, 0{,}05 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{220}} \right[\approx \left] 0{,}021; 0{,}079 \right[$$

3.

3.1. O número de residentes no concelho no início de janeiro de 2010 ($t = 0$) é:

$$P(0) = \frac{1239}{1 + 23 \times e^{-0{,}13\times 0}} \approx 52$$

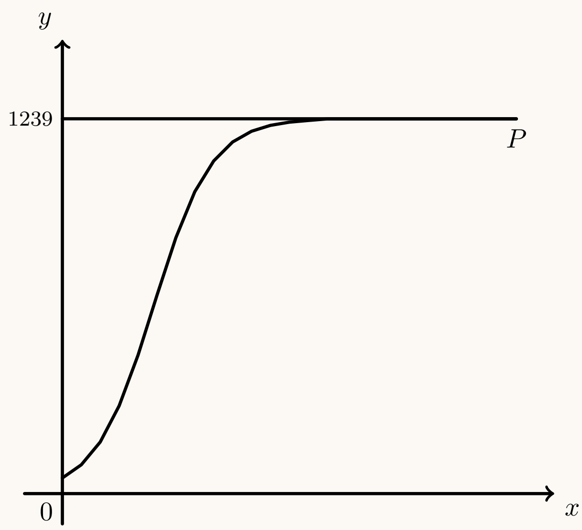
No início de janeiro de 2013, passaram 3 anos completos desde o início de janeiro de 2010, ou seja, $3 \times 12 = 36$ meses ($t = 36$), pelo que o número de residentes no concelho é:

$$P(36) = \frac{1239}{1 + 23 \times e^{-0{,}13\times 36}} \approx 1021$$

Assim, o valor do aumento do número de habitantes no concelho, neste período de tempo foi:

$$P(36) - P(0) = 1021 - 52 = 969 \text{ habitantes}$$

3.2. Representando na calculadora gráfica o modelo da variação do número de habitantes no concelho em função do tempo ($y = \dfrac{1239}{1+23e^{-0,13x}}$), e a reta horizontal definida pela equação $y = 1239$, numa janela compatível com um limite temporal alargado - 10 anos, $0 \leq x \leq 120$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 1500$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Assim podemos concluir que, com o decorrer do tempo, o limite para o valor de P é 1239, que corresponde, no modelo logístico, ao parâmetro que determina o limite superior da variação.

4.

4.1. Inserindo na calculadora gráfica as listas com os dados apresentados, temos:

Ano (x)	**N.º de sócios** (y)
0	10 585
10	23 150
20	30 981
30	39 125

Determinando a equação da reta de regressão, temos que os valores de a e b, usando valores aproximados com uma casa decimal, são $a \approx 934{,}5$ e $b \approx 11\,942{,}6$.

Desta forma a equação da reta de regressão é $y = 934{,}5x + 11\,942{,}6$, a que corresponde o modelo $N(t) = 934{,}5t + 11\,942{,}6$ e como o final de 2005 corresponde à passagem de 25 anos após o final de 1980, o número de sócios estimado, de acordo com o modelo, é:

$$N(25) = 934{,}5 \times 25 + 11\,942{,}6 \approx 35305$$

4.2. A opção correta é a Opção II (porque o diagrama evidencia uma correlação negativa forte, o declive da reta é negativo e a ordenada da origem é um valor compreendido entre 60 000 e 70 000).

A opção I não pode estar associada ao diagrama de dispersão porque a reta de regressão deverá ter declive negativo (o aumento do número de sócios está associado a uma diminuição do número de lugares por vender) e na opção I, o valor indicado para o declive é positivo ($a = 1{,}744$).

A opção III não pode estar associada ao diagrama de dispersão porque o diagrama de dispersão sugere a existência de uma correlação negativa forte, ou seja um valor do coeficiente de correlação próximo de -1 (os pontos estão dispostos num alinhamento próximo de uma reta de declive negativo) e na opção III, o valor indicado para o coeficiente de correlação indica a existência de uma correlação quase nula, ou seja, um valor próximo de zero ($r = -0{,}087$).

4.3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores dados:

15 680 17 549 14 746 19 418 20 353 22 222 28 763 26 894 34 370 37 174 38 108 39 043

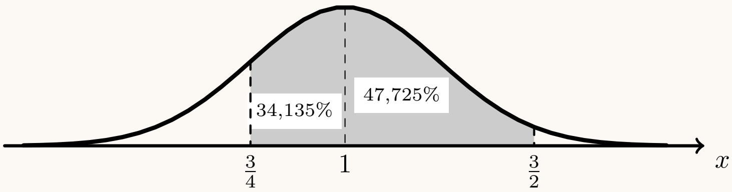
e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos os valores para a média e o desvio padrão dos dados registados:

$$\overline{x} = 26193{,}33 \text{ e } \sigma = 8725{,}84$$

5.

5.1. Como o índice de cada estabelecimento comercial é uma variavel aleatória X, que segue uma distribuição normal, com $\mu = 1$ e $\sigma = 0{,}25 = \frac{1}{4}$, temos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P\left(1 - \frac{1}{4} < X < 1 + \frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{3}{4} < X < \frac{5}{4}\right) \approx 68{,}27\%$
- $P(\mu - \sigma < X < \mu) = P\left(\frac{3}{4} < X < 1\right) \approx \frac{68{,}27}{2} \approx 34{,}135\%$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P\left(1 - \frac{1}{2} < X < 1 + \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) \approx 95{,}45\%$
- $P(\mu < X < \mu + 2\sigma) = P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) \approx \frac{95{,}45}{2} \approx 47{,}725\%$



Logo, temos que a probabilidade, na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas, do índice de um estabelecimento pertencer ao intervalo $\left]\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right[$, é:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{3}{4} < X < \frac{3}{2}\right) \approx 34{,}135 + 47{,}725 \approx 81{,}86\%$$

5.2. Como a probabilidade de um estabelecimento apresentar um índice pertencente ao intervalo $\left]1; \frac{3}{2}\right[$ é:

$$P(\mu < X < \mu + 2\sigma) = P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) \approx \frac{95{,}45}{2} \approx 47{,}725\%$$

Logo a probabilidade do estabelecimento apresentar um índice que não pertence ao intervalo é:

$$1 - P(\mu < X < \mu + 2\sigma) \approx 100 - 47{,}725 \approx 52{,}275\%$$

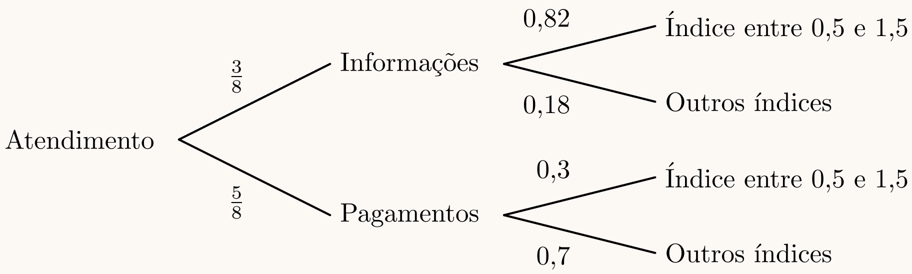
Assim a probabilidade de apenas dois dos três estabelecimentos apresentarem índices pertencentes ao intervalo $\left]1; \frac{3}{2}\right[$, é:

$$\overbrace{0{,}47725 \times 0{,}47725 \times 0{,}52275}^{\text{apenas o 1.º e 2.º}} + \overbrace{0{,}47725 \times 0{,}52275 \times 0{,}47725}^{\text{apenas o 1.º e o 3.º}} + \overbrace{0{,}52275 \times 0{,}47725 \times 0{,}47725}^{\text{apenas o 2.º e o 3.º}} =$$

$$= 3 \times 0{,}47725 \times 0{,}47725 \times 0{,}52275 \approx 0{,}35720$$

Ou seja, a probabilidade, na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas é 35,72%.

5.3. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atendimento de um comerciante, e os acontecimentos:
N:≪O atendimento destina-se a obter informação sobre a abertura de novas empresas comerciais≫
I:≪O atendimento é feito a um comerciante de uma empresa com um índice compreendido entre 0,5 e 1,5≫

Temos que a probabilidade, na forma de fração irredutível, de esse atendimento ter sido feito a um comerciante que procurava informação sobre a abertura de novas empresas, sabendo-se que o índice da sua empresa está compreendido entre 0,5 e 1,5, é:

$$P\left(N|I\right) = \frac{P\left(N \cap I\right)}{P\left(I\right)} = \frac{P\left(N \cap I\right)}{P\left(N \cap I\right) + P\left(\overline{N} \cap I\right)} = \frac{\frac{3}{8} \times 0{,}82}{\frac{3}{8} \times 0{,}82 + \frac{5}{8} \times 0{,}3} = \frac{0{,}3075}{0{,}495} = \frac{41}{66}$$