Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
2015 - 1.ª Fase

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito, temos:

Lista	A	B	C	D
Número de votos	220	530	650	150
Divisão por 1	220	530	650	150
Divisão por 3	$\frac{220}{3} \approx 73{,}3$	$\frac{530}{3} \approx 176{,}7$	$\frac{650}{3} \approx 216{,}7$	$\frac{150}{3} = 50$
Divisão por 5		$\frac{530}{5} = 106$	$\frac{650}{5} = 130$	
Divisão por 7		$\frac{530}{7} \approx 75{,}7$	$\frac{650}{7} \approx 92{,}9$	
Divisão por 9			$\frac{650}{9} \approx 72{,}2$	

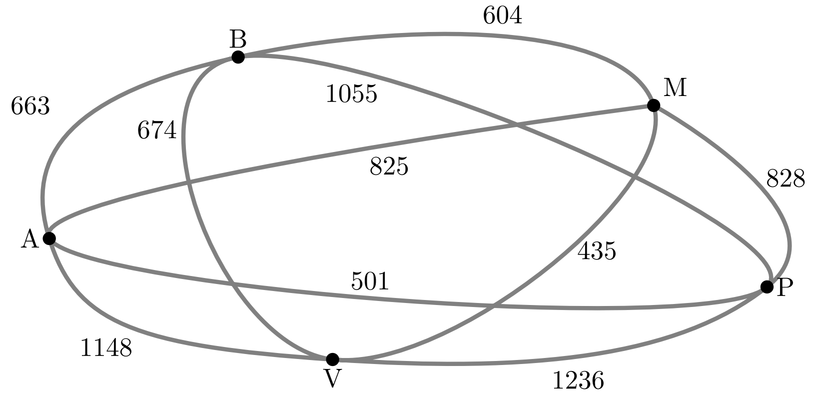
Na tabela seguinte estão o número de mandatos atribuídos a cada lista, de acordo com o método descrito, bem como o número de mandatos caso fossem atribuído na proporção direta do número de votos:

Lista	A	B	C	D
n.º de mandatos Método descrito	1	3	4	1
n.º de mandatos Proporção direta	$\frac{220}{1550} \times 9 \approx 1$	$\frac{530}{1550} \times 9 \approx 3$	$\frac{650}{1550} \times 9 \approx 4$	$\frac{150}{1550} \times 9 \approx 1$

Desta forma, podemos verificar que a proposta dos representantes da lista A e para esta votação, não implicava qualquer modificação do número de mandatos para todas as listas.

2.

2.1. Usando a informação da tabela obtemos o grafo da figura seguinte:



Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas:

I- Aresta M-V (435 km)

II- Aresta A-P (501 km)

III- Aresta B-M (604 km)

IV- Aresta A-B (663 km)

(não se considera a aresta B-V, porque se encontrariam três arestas no vértice B)

(não se consideram as arestas A-M, e M-P porque se encontrariam três arestas no vértice M)

(não se considera a aresta B-P, porque se encontrariam três arestas no vértice B)

(não se considera a aresta A-V, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

V- Aresta P-V (1236 km)

Assim, um possível percurso final definido pelo funcionário, com início e fim em Amesterdão (A), é:

$$A \to P \to V \to M \to B \to A$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

2.2. Distribuindo o prémio por cada um dos funcionários, de acordo com o método descrito, temos:

Bens \ **Funcionários**	**Alice**	**Bernardo**	**Camila**
Computador	600	950	750
Tablet	350	300	300
Viagem	850	1000	810
Valor global	1800	2250	1860
Valor considerado justo	600	750	620
Atribuição de bens	*Tablet*	Computador+Viagem	—
Valor monetário recebido	350	$950 + 1000 = 1950$	0
Excedente pago	—	1200	—
Valor em falta	$600 - 350 = 250$	—	620
Dinheiro sobrante	$1200 - 250 - 620 = 330$		
Divisão final	110	110	110

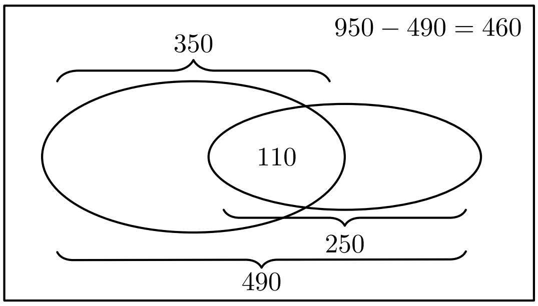
Assim, a distribuição final do prémio pelos três funcionários é:

- A Alice recebe o *tablet* e ainda $250 + 110 = 360$ euros
- O Bernardo recebe o computador e paga $1200 - 110 = 1090$ euros
- A Camila recebe $620 + 110 = 730$ euros

3.

3.1. A soma do número de encartados em 1990 com a soma de encartados do sexo feminino é $350 - 250 = 600$. Como existem 110 respondentes que são simultaneamente do sexo feminino e encartados em 1990, o número de respondentes que são mulheres ou encartados em 1990, é:

$$600 - 110 = 490$$



Assim, o número de habitantes encartados que responderam ao inquérito eram homens não encartados em 1990, é:

$$950 - 490 = 460$$

3.2.

3.2.1. Como 1985 corresponde a 5 anos pós 1980, ou seja, corresponde a $t = 5$, temos que a percentagem de encartados que são mulheres é 38%, porque:

$$M(5) = \frac{58}{1 + 1{,}7e^{-0{,}23\times 5}} \approx 37{,}7$$

Assim, como o total de novos encartados foi 4750, o número de mulheres que foram encartadas nesse ano, é:

$$4750 \times 0{,}38 = 1805$$

3.2.2. Inserimos na calculadora gráfica o modelo que dá a percentagem de horas de emissão diárias no dia 1 de janeiro de cada ano, após o ano 2000 ($y = \dfrac{58}{1+1{,}7e^{-0{,}23x}}$), e visualizamos a tabela de valores da função, procurando o primeiro valor superior a 50, como está reproduzida na figura ao lado.

X	Y1
8	45,670
9	47,756
10	49,554
11	51,082
12	52,366
13	53,432
14	54,311

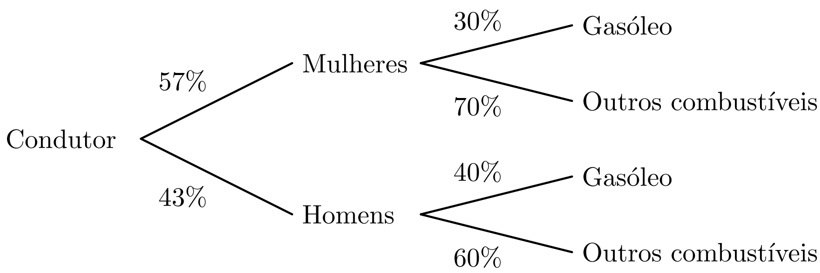
Assim, podemos verificar que o primeiro valor de t, para o qual se obtém uma percentagem superior a 50% é 11, a que corresponde o ano 1991 (11 anos após 1800).

Logo, o primeiro ano em que, no mês de janeiro, a percentagem de novos encartados do sexo feminino foi superior a 50% foi em 1991.

3.2.3. De acordo com o modelo, a percentagem a percentagem de novos encartados que são mulheres em 2000, ou seja, 20 anos após 1980, é:

$$M(20) = \frac{58}{1+1{,}7e^{-0{,}23\times 20}} \approx 57\%$$

Desta forma, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um condutor que tirou a carta no ano 2000, e os acontecimentos:
M:≪O condutor é do sexo feminino≫
G:≪O condutor é conduz um automóvel a gasóleo≫

Temos que a probabilidade de o encartado ser do sexo feminino, sabendo-se que não conduz um automóvel a gasóleo, na forma de dízima, arredondado às centésimas, é:

$$P\left(M|\overline{G}\right) = \frac{P\left(M\cap\overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)} = \frac{P\left(M\cap\overline{G}\right)}{P\left(M\cap\overline{G}\right)+P\left(\overline{M}\cap\overline{G}\right)} = \frac{0{,}57\times 0{,}7}{0{,}57\times 0{,}7+0{,}43\times 0{,}6} = \frac{0{,}399}{0{,}657} \approx 0{,}61$$

4. Calculando o PVP do automóvel nos dois países, temos:

	Portugal	País onde vive o Ivo
Preço base	18 000 €	18 000 €
ISV	9251 €	$9251 \times 1{,}28 = 11\,841{,}28$ €
IVA	23%	18%
PVP	$(18\,000 + 9251)\times 1{,}23 = 33\,518{,}73$ €	$18\,000\times 1{,}18 + 11\,841{,}28 = 33\,081{,}28$ €

Assim, podemos concluir que o preço final (PVP) do automóvel que interessa ao Ivo é mais barato no país onde reside do que em Portugal.

5.

5.1. Como o ângulo ao centro correspondente ao setor dos encartados que realizaram exatamente três exames de condução tem de amplitude 27 graus, e o setor circular tem 360 graus, então o número de encartados (do total dos 200 inquiridos), ou seja o valor de a, é dado por:

$$\frac{a}{200} = \frac{27}{360} \Leftrightarrow a = \frac{27 \times 200}{360} \Leftrightarrow a = 15$$

Desta forma, podemos determinar o valor de b, subtraindo ao total de inquiridos (200) os que realizaram menos que quatro exames:

$$b = 200 - 130 - 50 - 15 = 5$$

5.2. Temos que o número total de inquéritos é 200 e o número de encartados que realizaram 2 exames é 50.

Assim, como são escolhidos dois dos encartados, a variável X pode assumir os valores zero (nenhum dos dois encartados realizou 2 exames); 1 (um dos dois encartados realizou 2 exames) ou 2 (ou dois encartados realizaram 2 exames), e as respetivas probabilidades, na forma de dízima, arredondadas às centésimas, são:

- $P(X = 0) = \frac{150}{200} \times \frac{149}{199} \approx 0{,}56$ (escolhendo dois dos 150 encartados que não realizaram 2 exames)
- $P(X = 1) = \frac{150}{200} \times \frac{50}{199} + \frac{50}{200} \times \frac{150}{199} \approx 0{,}38$ (escolhendo um dos 150 encartados que não realizaram 2 exames e depois um dos 50 que realizaram dois exames ou então, a mesma escolha por ordem inversa)
- $P(X = 2) = \frac{50}{200} \times \frac{49}{199} \approx 0{,}06$ (escolhendo dois dos 50 encartados que realizaram 2 exames)

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,56	0,38	0,06

5.3. Como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 200$
- A média amostral: $\overline{x} = 30{,}2$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 3{,}4$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança o número médio de horas que os encartados dedicam à preparação do exame de condução $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às décimas, temos:

$$\left] 30{,}2 - 1{,}960 \times \frac{3{,}4}{\sqrt{200}} \, ; \, 30{,}2 + 1{,}960 \times \frac{3{,}4}{\sqrt{200}} \right[\approx]29{,}7; 30{,}7[$$