Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2015, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1. Da aplicação do método proposto pelos sócios, considerando o número de sócios de cada filial, vem que:

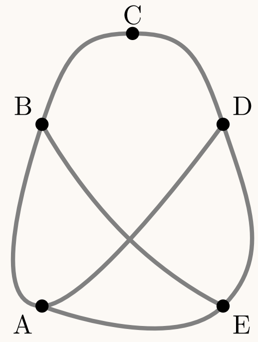
Filiais	A	B	C	D
Número de funcionários	300	560	830	240
Total de funcionários	$300+560+830+240=1930$			
Divisor padrão	$\frac{1930}{200}=9{,}65$			
Quota padrão	$\frac{300}{9{,}65}\approx 31{,}088$	$\frac{560}{9{,}65}\approx 58{,}031$	$\frac{830}{9{,}65}\approx 86{,}010$	$\frac{240}{9{,}65}\approx 24{,}870$
L	31	58	86	24
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{31\times 32}\approx 31{,}496$	$\sqrt{58\times 359}\approx 58{,}498$	$\sqrt{86\times 87}\approx 86{,}499$	$\sqrt{24\times 25}\approx 24{,}495$
Quota arredondada	31	58	86	$24+1=25$
Soma das quotas arredondadas	$31+58+86+25=200$			

Assim, temos que o número de convites para o congresso que cada filial da PTM irá receber, é:

- Filial A: 31 convites
- Filial B: 58 convites
- Filial C: 86 convites
- Filial D: 25 convites

2.

2.1. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma ligação rodoviária existente.



Identificando todos os percursos possíveis em cada alternativa, temos:

- **alternativa 1 :**
  - C → B → **A** → **E** → D → C
  - C → D → **A** → **E** → B → C
- **alternativa 2 :**
  - C → **D** → E → A → **B** → C
  - C → **D** → A → E → **B** → C

Como em ambas as alternativas é possível definir o mesmo número de percursos (dois percursos em cada alternativa), o Sr. Pereira não tem razão.

2.2. Observando os dados da tabela podemos concluir que o número de dias em que os gastos em portagens, no mês de abril, foi inferior a 10 euros, é a soma das frequências absolutas das classes [0,5[e [5,10[, ou seja $3 + 9 = 12$

Observando o histograma das frequências relativas acumuladas, podemos verificar que a percentagem de dias do mês de novembro em que os gastos em portagens foi inferior a 10 euros, é a frequência relativa acumulada da classe [5,10[, ou seja 30%
Como o mês de novembro tem 30 dias, o número de dias correspondente é $30 \times 0{,}3 = 9$

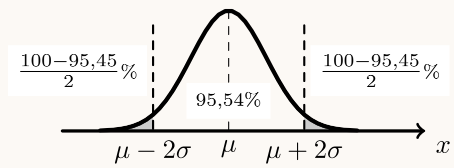
Desta forma, podemos concluir que o Sr. Pereira não tem razão, uma vez que em abril existiram mais dias (do que em novembro) em que a quantia gasta em portagens foi inferior a 10 euros.

2.3. Considerando a variável X: Gastos diários de cada veículo em portagens, temos que:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\% \quad \text{e} \quad P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$$

E assim, vem que:

$$P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{100 - 95{,}45}{2} \approx 2{,}275\%$$



Ou seja, a probabilidade de, nesse dia, o gasto em portagens ser superior a $\mu + 2\sigma$ euros, na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas, é 2,28%

3. Procedendo à partilha dos bens, aplicando o método descrito, temos:

Sócios / **Bens**	**David**	**Tomás**
Frota de motos	20	25
Frota de automóveis	45	25
Avião	35	50
Partilha temporária	Automóveis	Motos+Avião
Total temporário	45	$25 + 50 = 75$
Designação	B	A
Bem usado no ajuste	Frota de motos	
Total final	$45 + \frac{x}{100} \times 20$	$75 - \frac{x}{100} \times 25$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$45 + \frac{x}{100} \times 20 = 75 - \frac{x}{100} \times 25 \Leftrightarrow 45 + \frac{x \times 20}{100} = 75 - \frac{x \times 25}{100} \Leftrightarrow 45 + 0{,}2x = 75 - 0{,}25x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}25x = 75 - 45 \Leftrightarrow 0{,}45x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{0{,}25} \Rightarrow x \approx 66{,}67$$

Desta forma, o número total de pontos do David é a soma dos pontos atribuídos à frota de automóveis e 66,67% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $45 + 20 \times 0{,}6667 \approx 58{,}34$

De forma correspondente, o Tomás ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos ao avião e 33,33% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $50 + 25 \times 0{,}3333 \approx 58{,}33$

Ou seja, os dois sócios ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- O Diogo recebe a frota de automóveis e 66,67% da frota de motos.
- O Tomás recebe o avião e 33,33% da frota de motos.

4.

4.1. Como $t = 1$ corresponde ao fim do primeiro dia de negociação das ações em bolsa, a cotação das ações ao final do primeiro dia é dado por $C(1)$ e ao final do sétimo dia é dado por $C(7)$:

- $C(1) = 5{,}1 - 3\log_{10}(1 + 0{,}1) = 5{,}1 - 3\log_{10}(1{,}1) \approx 4{,}976$
- $C(7) = 5{,}1 - 3\log_{10}(7 + 0{,}1) = 5{,}1 - 3\log_{10}(7{,}1) \approx 2{,}546$

Logo, o valor da desvalorização de cada ação, desde o final do primeiro dia de negociação das ações até ao final do sétimo dia, arredondada às centésimas é:

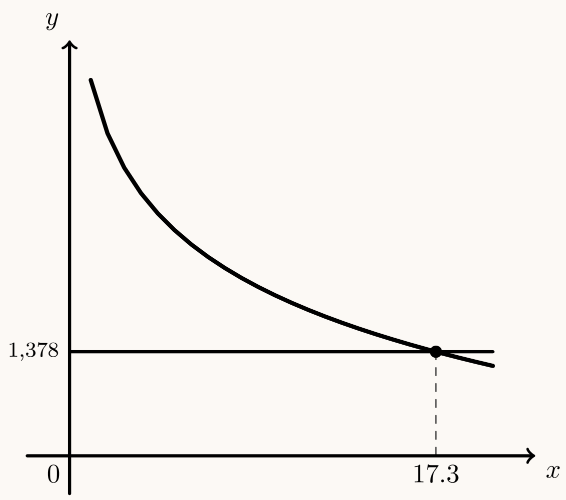
$$C(1) - C(7) \approx 4{,}976 - 2{,}546 \approx 2{,}43 \text{ euros}$$

4.2. A cotação das ações ao final do segundo dia é dado por $C(2)$, pelo que um terço do valor registado no final do segundo dia de negociação é:

$$\frac{C(2)}{3} = \frac{5{,}1 - 3\log_{10}(2 + 0{,}1)}{3} = \frac{5{,}1 - 3\log_{10}(2{,}1)}{3} \approx 1{,}378$$

Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da cotação de cada ação em função do tempo ($y = 5{,}1 - 3\log(x + 0{,}1)$) e da reta correspondente ao valor de um terço da cotação no final do segundo dia ($y = 1{,}378$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $1 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 5$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa dos ponto de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que a cotação das ações era um terço do valor registado ao fim do segundo dia, ou seja, o ponto de coordenadas $(1{,}378\,;\,17{,}3)$



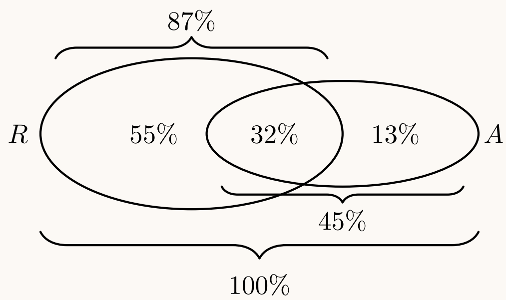
Assim, como o valor indicado foi atingido após o final do 17.º dia, a cotação esteve acima deste valor durante 17 dias após os rumores terem começado.

5.

5.1. Como em todos os serviços foi utilizado pelo o transporte rodoviário ou o transporte aéreo, e a soma das respetivas percentagens é $87 + 45 = 132\%$, temos que a percentagem de serviços em que foram utilizados os dois tipos de transporte é:

$$132 - 100 = 32\%$$

Assim, a percentagem de transportes em que foi utilizado exclusivamente o transporte rodoviário é $87 - 32 = 55\%$, e da mesma forma, a percentagem de transportes em que foi utilizado exclusivamente o transporte aéreo é $45 - 32 = 13\%$.



Logo a probabilidade, em percentagem, de, escolhido um serviço prestado ao acaso, este ter sido efetuado recorrendo apenas a um dos dois tipos de transporte é:

$$55 + 13 = 68\%$$

5.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma mercadoria transportada pela PTM em 2013, e os acontecimentos:
R:≪A mercadoria foi transportada por meio rodoviário≫
D:≪A mercadoria chegou ao destino dentro do prazo estabelecido≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(R) = 0{,}78$, $P(D) = 0{,}778$ e $P(D|R) = 0{,}8$

Assim, organizando os dados na tabela ao lado, obtemos:

	D	$\overline{D}$	
R	0,624		0,78
$\overline{R}$	0,154		
	0,778		1

- $P(D \cap R) = P(R) \times P(D|R) = 0{,}78 \times 0{,}8 = 0{,}624$
- $P\left(\overline{R} \cap D\right) = P\left(\overline{D}\right) - P(R \cap D) = 0{,}778 - 0{,}624 = 0{,}154$

Desta forma, a probabilidade de, escolhida ao acaso uma mercadoria, esta não ter sido transportada por meio rodoviário, sabendo-se que chegou ao seu destino dentro do prazo acordado, é:

$$P\left(\overline{R}|D\right) = \frac{P\left(\overline{R} \cap D\right)}{P(D)} = \frac{0{,}154}{0{,}778} \approx 0{,}198$$

Logo, a probabilidade na forma de percentagem, arredondado às unidades, é 20%

5.3. Sabendo que a probabilidade de um serviço marcado utilizar o transporte rodoviário é de 0,8, a probabilidade de um serviço não usar este transporte é de $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Assim, a probabilidade de, ao serem marcados três serviços, em exatamente dois deles ser utilizado o transporte rodoviário, deve considerar as hipóteses de que este transporte seja usado nas 1.ª e 2.ª marcações, nas 1.ª e 3.ª marcações ou então nas 2.ª e 3.ª marcações.

Assim o valor da probabilidade é:

$$\overbrace{0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2}^{\text{Usar na 1.ª e na 2.ª}} + \overbrace{0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}8}^{\text{Usar na 1.ª e na 3.ª}} + \overbrace{0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8}^{\text{Usar na 2.ª e na 3.ª}} = 3 \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}384$$

Desta forma o valor da probabilidade, em percentagem, é 38,4%

5.4. Como a dimensão da amostra dos contratos da PTM tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- A média amostral: $\overline{x} = 6$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 0{,}5$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left]6 - 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{40}} ; 6 + 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{40}}\right[\approx]5{,}845; 6{,}155[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às milésimas, é:

$$\frac{\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{2} \approx \frac{6{,}155 - 5{,}845}{2} \approx 0{,}155$$