

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

2015 - 2.^a Fase

Proposta de resolução

1. Da aplicação do método proposto pelos sócios, considerando o número de sócios de cada filial, vem que:

Filiais	A	B	C	D
Número de funcionários	300	560	830	240
Total de funcionários	$300 + 560 + 830 + 240 = 1930$			
Divisor padrão	$\frac{1930}{200} = 9,65$			
Quota padrão	$\frac{300}{9,65} \approx 31,088$	$\frac{560}{9,65} \approx 58,031$	$\frac{830}{9,65} \approx 86,010$	$\frac{240}{9,65} \approx 24,870$
L	31	58	86	24
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{31 \times 32} \approx 31,496$	$\sqrt{58 \times 59} \approx 58,498$	$\sqrt{86 \times 87} \approx 86,499$	$\sqrt{24 \times 25} \approx 24,495$
Quota arredondada	31	58	86	$24 + 1 = 25$
Soma das quotas arredondadas	$31 + 58 + 86 + 25 = 200$			

Assim, temos que o número de convites para o congresso que cada filial da PTM irá receber, é:

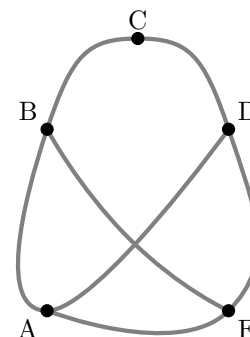
- Filial A: 31 convites
- Filial B: 58 convites
- Filial C: 86 convites
- Filial D: 25 convites

2.

2.1. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma ligação rodoviária existente.

Identificando todos os percursos possíveis em cada alternativa, temos:

- **alternativa 1 :**
 - $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$
 - $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C$
- **alternativa 2 :**
 - $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
 - $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C$



Como em ambas as alternativas é possível definir o mesmo número de percursos (dois percursos em cada alternativa), o Sr. Pereira não tem razão.



- 2.2. Observando os dados da tabela podemos concluir que o número de dias em que os gastos em portagens, no mês de abril, foi inferior a 10 euros, é a soma das frequências absolutas das classes $[0,5[$ e $[5,10[$, ou seja $3 + 9 = 12$

Observando o histograma das frequências relativas acumuladas, podemos verificar que a percentagem de dias do mês de novembro em que os gastos em portagens foi inferior a 10 euros, é a frequência relativa acumulada da classe $[5,10[$, ou seja 30%

Como o mês de novembro tem 30 dias, o número de dias correspondente é $30 \times 0,3 = 9$

Desta forma, podemos concluir que o Sr. Pereira não tem razão, uma vez que em abril existiram mais dias (do que em novembro) em que a quantia gasta em portagens foi inferior a 10 euros.

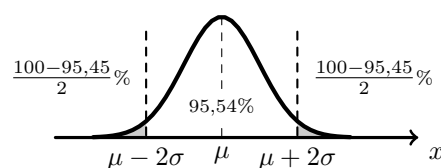
- 2.3. Considerando a variável X : Gastos diários de cada veículo em portagens, temos que:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,45\% \quad \text{e} \quad P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$$

E assim, vem que:

$$P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{100 - 95,45}{2} \approx 2,275\%$$

Ou seja, a probabilidade de, nesse dia, o gasto em portagens ser superior a $\mu + 2\sigma$ euros, na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas, é 2,28%



3. Procedendo à partilha dos bens, aplicando o método descrito, temos:

Bens	Sócios	
	David	Tomás
Frota de motos	20	25
Frota de automóveis	45	25
Avião	35	50
Partilha temporária	Automóveis	Motos+Avião
Total temporário	45	25 + 50 = 75
Designação	B	A
Bem usado no ajuste	Frota de motos	
Total final	$45 + \frac{x}{100} \times 20$	$75 - \frac{x}{100} \times 25$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$45 + \frac{x}{100} \times 20 = 75 - \frac{x}{100} \times 25 \Leftrightarrow 45 + \frac{x \times 20}{100} = 75 - \frac{x \times 25}{100} \Leftrightarrow 45 + 0,2x = 75 - 0,25x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2x + 0,25x = 75 - 45 \Leftrightarrow 0,45x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{0,45} \Rightarrow x \approx 66,67$$

Desta forma, o número total de pontos do David é a soma dos pontos atribuídos à frota de automóveis e 66,67% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $45 + 20 \times 0,6667 \approx 58,34$

De forma correspondente, o Tomás ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos ao avião e 33,33% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $50 + 25 \times 0,3333 \approx 58,33$

Ou seja, os dois sócios ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- O Diogo recebe a frota de automóveis e 66,67% da frota de motos.
- O Tomás recebe o avião e 33,33% da frota de motos.



4.

4.1. Como $t = 1$ corresponde ao fim do primeiro dia de negociação das ações em bolsa, a cotação das ações ao final do primeiro dia é dado por $C(1)$ e ao final do sétimo dia é dado por $C(7)$:

- $C(1) = 5,1 - 3 \log_{10}(1 + 0,1) = 5,1 - 3 \log_{10}(1,1) \approx 4,976$
- $C(7) = 5,1 - 3 \log_{10}(7 + 0,1) = 5,1 - 3 \log_{10}(7,1) \approx 2,546$

Logo, o valor da desvalorização de cada ação, desde o final do primeiro dia de negociação das ações até ao final do sétimo dia, arredondada às centésimas é:

$$C(1) - C(7) \approx 4,976 - 2,546 \approx 2,43 \text{ euros}$$

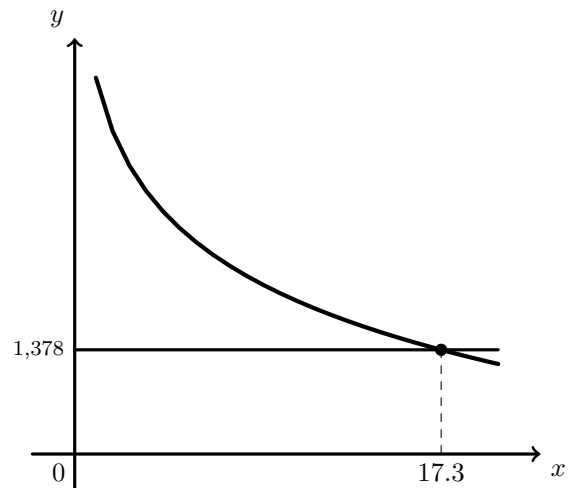
4.2. A cotação das ações ao final do segundo dia é dado por $C(2)$, pelo que um terço do valor registado no final do segundo dia de negociação é:

$$\frac{C(2)}{3} = \frac{5,1 - 3 \log_{10}(2 + 0,1)}{3} = \frac{5,1 - 3 \log_{10}(2,1)}{3} \approx 1,378$$

Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da cotação de cada ação em função do tempo ($y = 5,1 - 3 \log(x + 0,1)$) e da reta correspondente ao valor de um terço da cotação no final do segundo dia ($y = 1,378$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $1 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 5$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa dos ponto de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que a cotação das ações era um terço do valor registado ao fim do segundo dia, ou seja, o ponto de coordenadas $(1,378; 17,3)$

Assim, como o valor indicado foi atingido após o final do 17.º dia, a cotação esteve acima deste valor durante 17 dias após os rumores terem começado.

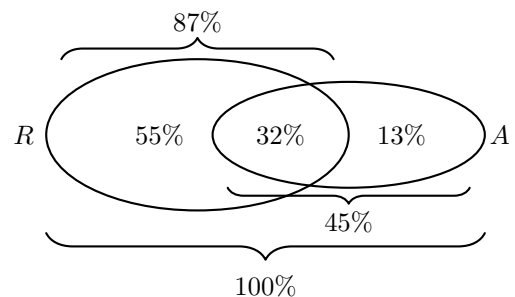


5.

5.1. Como em todos os serviços foi utilizado pelo o transporte rodoviário ou o transporte aéreo, e a soma das respetivas percentagens é $87 + 45 = 132\%$, temos que a percentagem de serviços em que foram utilizados os dois tipos de transporte é:

$$132 - 100 = 32\%$$

Assim, a percentagem de transportes em que foi utilizado exclusivamente o transporte rodoviário é $87 - 32 = 55\%$, e da mesma forma, a percentagem de transportes em que foi utilizado exclusivamente o transporte aéreo é $45 - 32 = 13\%$.



Logo a probabilidade, em percentagem, de, escolhido um serviço prestado ao acaso, este ter sido efetuado recorrendo apenas a um dos dois tipos de transporte é:

$$55 + 13 = 68\%$$



5.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma mercadoria transportada pela PTM em 2013, e os acontecimentos:

R : «A mercadoria foi transportada por meio rodoviário»

D : «A mercadoria chegou ao destino dentro do prazo estabelecido»

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(R) = 0,78$,
 $P(D) = 0,778$ e $P(D|R) = 0,8$

Assim, organizando os dados na tabela ao lado, obtemos:

- $P(D \cap R) = P(R) \times P(D|R) = 0,78 \times 0,8 = 0,624$
- $P(\bar{R} \cap D) = P(D) - P(D \cap R) = 0,778 - 0,624 = 0,154$

	D	\bar{D}	
R	0,624		0,78
\bar{R}	0,154		
	0,778		1

Desta forma, a probabilidade de, escolhida ao acaso uma mercadoria, esta não ter sido transportada por meio rodoviário, sabendo-se que chegou ao seu destino dentro do prazo acordado, é:

$$P(\bar{R}|D) = \frac{P(\bar{R} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,154}{0,778} \approx 0,198$$

Logo, a probabilidade na forma de percentagem, arredondado às unidades, é 20%

5.3. Sabendo que a probabilidade de um serviço marcado utilizar o transporte rodoviário é de 0,8, a probabilidade de um serviço não usar este transporte é de $1 - 0,8 = 0,2$.

Assim, a probabilidade de, ao serem marcados três serviços, em exatamente dois deles ser utilizado o transporte rodoviário, deve considerar as hipóteses de que este transporte seja usado nas 1.^a e 2.^a marcações, nas 1.^a e 3.^a marcações ou então nas 2.^a e 3.^a marcações.

Assim o valor da probabilidade é:

$$\underbrace{0,8 \times 0,8 \times 0,2}_{\text{Usar na 1.ª e na 2.ª}} + \underbrace{0,8 \times 0,2 \times 0,8}_{\text{Usar na 1.ª e na 3.ª}} + \underbrace{0,2 \times 0,8 \times 0,8}_{\text{Usar na 2.ª e na 3.ª}} = 3 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,8 = 0,384$$

Desta forma o valor da probabilidade, em percentagem, é 38,4%

5.4. Como a dimensão da amostra dos contratos da PTM tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- A média amostral: $\bar{x} = 6$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 0,5$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio

$\left(\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left[6 - 1,960 \times \frac{0,5}{\sqrt{40}} ; 6 + 1,960 \times \frac{0,5}{\sqrt{40}} \right] \approx]5,845; 6,155[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às milésimas, é:

$$\frac{\bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}} \right)}{2} \approx \frac{6,155 - 5,845}{2} \approx 0,155$$

