

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 835/Época Especial**

12 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2016**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

---

**Página em branco**

---

---

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
  - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
  - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

# Formulário

---

## Teoria matemática das eleições

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

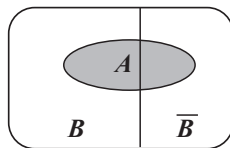
## Modelos de grafos

### Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

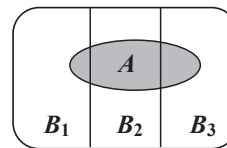
## Probabilidades

### Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

## Distribuição normal

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $\sigma$  – desvio padrão da variável  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $s$  – desvio padrão amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\hat{p}$  – proporção amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

---

**Página em branco**

---

1. O canal Televisão Para Todos (TPT) vai realizar uma gala para entrega de prémios em diversas categorias.

Na categoria de melhor ator, foram nomeados os atores: António Santana (A), Pedro Pereira (P), Ricardo Teixeira (R) e Vasco Silva (V).

Os espectadores votaram por *sms* ao longo de uma semana, ordenando os quatro atores, de acordo com as suas preferências. Cada *sms*, indicando uma determinada ordenação, correspondia a 1 voto, tendo sido apurados 1500 votos válidos.

Na Tabela 1, encontram-se organizados os resultados obtidos.

**Tabela 1**

<b>N.º de votos</b>	<b>615</b>	<b>300</b>	<b>435</b>	<b>150</b>
<b>Preferências</b>				
<b>1.<sup>a</sup></b>	P	V	R	R
<b>2.<sup>a</sup></b>	A	R	V	V
<b>3.<sup>a</sup></b>	V	A	A	P
<b>4.<sup>a</sup></b>	R	P	P	A

O ator vencedor foi apurado através do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de atores e, não alterando o número de votos nem a ordem das preferências, elabora-se uma nova tabela, semelhante à apresentada, apenas com os votos nos dois atores que constituem esse par.
- Comparam-se os votos obtidos por esses dois atores, atendendo apenas à primeira linha da nova tabela; o ator com o maior número de votos na primeira linha é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até um dos atores ter vencido em todas as comparações com os restantes.
- Indica-se o ator vencedor.

O diretor da gala afirmou que o vencedor seria diferente se o apuramento tivesse sido realizado aplicando o método que a seguir se descreve.

- Atribuem-se pontos a cada um dos atores em função do seu lugar na ordem de preferência. Cada ator recebe:
  - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
  - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos atores.
- O vencedor é o ator com o maior número de pontos.

Prove que, recorrendo a um ou ao outro método, Vasco Silva (V) é o vencedor do prémio de melhor ator.

2. As instalações do TPT estão distribuídas por cinco edifícios: E1, E2, E3, E4 e E5.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois edifícios estão registadas na Tabela 2.

**Tabela 2**

	<b>E2</b>	<b>E3</b>	<b>E4</b>	<b>E5</b>
<b>E1</b>	166	206	125	287
<b>E2</b>	----	151	264	169
<b>E3</b>	----	----	207	109
<b>E4</b>	----	----	----	309

No final de cada dia, um estafeta recolhe o correio em cada um dos edifícios. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, começou por ordenar, de forma crescente, as distâncias registadas na Tabela 2. De seguida, recorrendo a um grafo, construiu um percurso fechado que ligava os cinco edifícios. Para tal, adotou o seguinte método.

- Representou a primeira aresta do grafo correspondente à menor das distâncias entre os edifícios.
- Representou as restantes arestas, selecionando sucessivamente as menores distâncias, garantindo que três delas não se encontrassem num mesmo vértice e que não se fechassem percursos sem que todos os vértices estivessem incluídos.

Apresente um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3).

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação, de forma crescente, das distâncias registadas na Tabela 2;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo estafeta.



3. O concurso Ganha Sempre é um dos programas com maior audiência do TPT.

Numa das suas emissões, a equipa vencedora, formada por Constança e Deodato, ganhou um carro, uma estada de 15 dias num hotel e uma *scooter*. Os dois decidiram negociar os prémios entre si, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada elemento da equipa atribui, secretamente, pontos a cada um dos prémios, de modo que o total dos seus pontos atribuídos seja 100.
- Cada prémio é destinado, temporariamente, ao elemento da equipa que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos dos prémios temporariamente destinados a cada elemento da equipa.

Seja A o elemento da equipa com o total de pontos mais elevado e B o outro elemento da equipa.

- Proceda-se ao ajuste da partilha, de modo que os elementos da equipa fiquem com igual total de pontos. O prémio que tiver menor diferença de pontos atribuídos é o usado para fazer o ajuste, sendo esse o prémio a partilhar pelos elementos da equipa.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao elemento A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento do valor por ele atribuído ao prémio a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao elemento B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento do valor por este atribuído ao prémio a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$  para o qual a partilha fica equilibrada.

A Tabela 3 apresenta os pontos atribuídos aos prémios por cada um dos elementos da equipa.

Tabela 3

Prémios \ Elementos da equipa	Constança	Deodato
Carro	30	50
Estada	60	35
Scooter	10	15

Proceda à partilha dos prémios, aplicando o método acima descrito.

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos prémios pelos elementos da equipa;
- determine o total de pontos dos prémios temporariamente destinados a cada elemento da equipa;
- selecione o prémio a utilizar no ajuste da partilha;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- prove que, com a solução encontrada, ambos os elementos da equipa ficam com igual total de pontos;
- apresente a partilha final dos prémios.

4. Desde a inauguração do TPT, a 1 de janeiro de 2000, o número diário de horas de transmissão tem vindo a aumentar.

No dia 1 de janeiro,  $n$  anos após a inauguração do canal, a percentagem de horas de emissão diárias é dada aproximadamente por

$$a(n) = \frac{83}{1 + be^{-0,25n}}, \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Considere que  $n = 0$  corresponde ao dia 1 de janeiro de 2000 e que  $b$  é um número real.

- 4.1. Supondo que, em 1 de janeiro de 2000, a emissão do TPT durou 21% desse dia, determine  $b$ .

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 4.2. Considere agora que  $b = 3,5$ .

- 4.2.1. Indique em que anos, no dia 1 de Janeiro, a percentagem de horas de emissão se situou entre 65% e 74%.

Na resolução deste item, recorra à calculadora gráfica para construir uma tabela.

Apresente os valores, aproximados às unidades, das linhas da tabela relevantes para a resolução.

- 4.2.2. Uma parte da emissão do TPT é ocupada com publicidade. A Tabela 4 apresenta o custo da publicidade, por minuto, em função do horário em que é transmitida.

**Tabela 4**

Horário	0h-12h	12h-20h
Preço por minuto	1000 €	1200 €

No dia 1 de janeiro de 2011, uma empresa comprou 1% das horas de emissão para publicitar um produto. O tempo adquirido para esta publicidade foi distribuído de igual forma pelos períodos da manhã e da tarde.

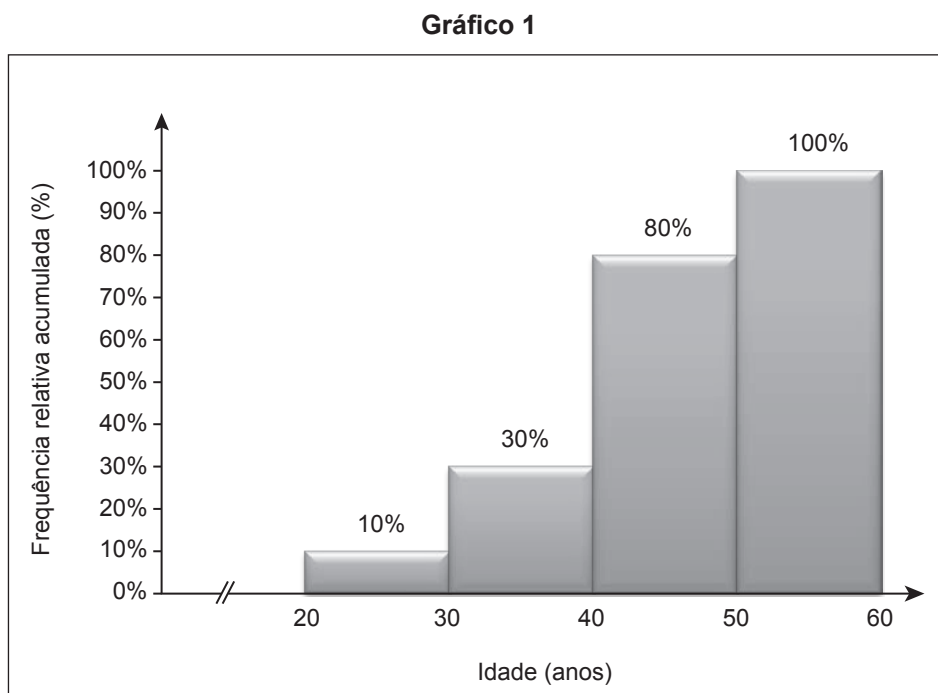
Qual foi o custo, em euros, desta publicidade?

Na sua resposta, apresente, arredondados à unidade, os minutos adquiridos para esta publicidade.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, duas casas decimais.

5. A redação de informação do TPT é constituída por uma equipa de jornalistas.

5.1. No Gráfico 1, apresenta-se o histograma de frequências relativas acumuladas referente às idades dos jornalistas.



Tendo em conta os dados apresentados, determine a média aproximada das idades dos jornalistas.

5.2. A Tabela 5 apresenta os dados referentes às alturas, em centímetros, dos jornalistas do TPT.

**Tabela 5**

Altura (em centímetros)	[160, 170[	[170, 180[	[180, 190[	[190, 200[
Número de jornalistas	4	8	6	2

Marque, por processos geométricos, na classe mediana, a localização aproximada da mediana dos dados agrupados apresentados na Tabela 5.

Na sua resposta:

- construa um histograma com as frequências relativas acumuladas;
- indique a classe mediana;
- construa o polígono de frequências acumuladas;
- assinale, no eixo das abcissas, o valor aproximado da mediana.

6. Numa amostra aleatória de trabalhadores do TPT, com dimensão superior a 30, aproximadamente 15% deles pesam, pelo menos, 75 quilogramas.

Determine a dimensão mínima da amostra,  $n$ , de modo que o intervalo a 99% de confiança, para a proporção de trabalhadores com, pelo menos, 75 quilogramas, tenha uma amplitude inferior a 0,2.

Na sua resposta:

- escreva uma expressão da amplitude do intervalo em função de  $n$ ;
- apresente uma condição que traduza o problema.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, cinco casas decimais.

7. Em cada dia, o diretor de programas do TPT define a sequência de programas a transmitir.

- 7.1. No dia 14 de fevereiro, o diretor de programas tem de ocupar três horas de emissão. Para isso, dispõe de dois filmes, cada um com a duração de uma hora e trinta minutos, e de três documentários, cada um com a duração de trinta minutos.

Quantas sequências será possível formar, de modo que programas do mesmo tipo sejam exibidos consecutivamente?

- 7.2. No dia 25 de dezembro, o diretor de programas optou pela exibição de dois filmes. Após a exibição, efetuou-se um estudo junto de 100 espectadores, dos quais 40 eram mulheres, para aferir as suas preferências. Concluiu-se que:

- 30% das mulheres preferiram o segundo filme;
- 42% dos espectadores eram homens e preferiram o segundo filme.

Determine a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses espectadores, o mesmo ser mulher sabendo que preferiu o primeiro filme.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

**FIM**

**COTAÇÕES**

Item											TOTAL
Cotação (em pontos)											
1.	2.	3.	4.1.	4.2.1.	4.2.2.	5.1.	5.2.	6.	7.1.	7.2.	
25	20	20	15	20	15	15	20	15	15	20	<b>200</b>