

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2016, Época especial)
Proposta de resolução



1. Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

	Nº. de votos	615	300	435	150	Total de votos	Vencedor
Par V-A	1. ^a preferência	A	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2. ^a preferência	V	A	A	A	A: 615	
Par V-P	1. ^a preferência	P	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2. ^a preferência	V	P	P	P	P: 615	
Par V-R	1. ^a preferência	V	V	R	R	V: $615 + 300 = 915$	V
	2. ^a preferência	R	R	V	V	R: $435 + 150 = 585$	

Como o ator V (Vasco Silva) venceu na comparação com todos os restantes é o ator vencedor.

Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

- Pontuação do ator A: $3 \times 615 + 2 \times 300 + 2 \times 435 + 1 \times 150 = 3465$
- Pontuação do ator P: $4 \times 615 + 1 \times 300 + 1 \times 435 + 2 \times 150 = 3495$
- Pontuação do ator R: $1 \times 615 + 3 \times 300 + 4 \times 435 + 4 \times 150 = 3855$
- Pontuação do ator V: $2 \times 615 + 4 \times 300 + 3 \times 435 + 3 \times 150 = 4185$

Como o ator V (Vasco Silva) é o que tem maior número de pontos, também é o vencedor decorrente da aplicação deste método.

2. Ordenando as distâncias entre os cinco edifícios registadas na tabela, temos:

$$\begin{matrix} 109 < 125 < 151 < 166 < 169 < 206 < 207 < 264 < 287 < 309 \\ E3-E5 & E1-E4 & E2-E3 & E1-E2 & E2-E5 & E1-E3 & E3-E4 & E2-E4 & E1-E5 & E4-E5 \end{matrix}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta E3-E5

II- Aresta E1-E4

III- Aresta E2-E3

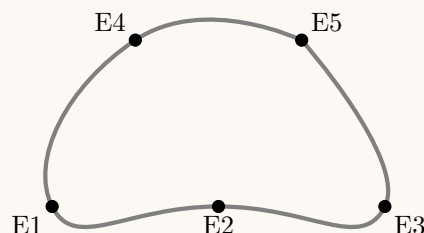
IIV- Aresta E1-E2

(não se considera a aresta E2-E5, porque fecharia um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos)

(não se consideram as arestas E1-E3 e E3-E4, porque se encontrariam três arestas no vértice E3)

(não se consideram as arestas E2-E4 e E1-E5, porque se encontrariam três arestas nos vértices E2 e E1, respetivamente)

IV- Aresta E4-E5



Assim, um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3), é:

$$E3 \rightarrow E5 \rightarrow E4 \rightarrow E1 \rightarrow E2 \rightarrow E3$$



3. Procedendo à partilha dos prémios, aplicando o método descrito, temos:

Prémios \ Elementos da equipa	Constança	Deodato
Carro	30	50
Estada	60	35
Scooter	10	15
Atribuição temporária	Estada	Carro + Scooter
Total temporário	60	$50 + 15 = 65$
Designação	B	A
Prémio usado no ajuste	<i>Scooter</i>	
Total final	$60 + \frac{x}{100} \times 10$	$65 - \frac{x}{100} \times 15$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$60 + \frac{x}{100} \times 10 = 65 - \frac{x}{100} \times 15 \Leftrightarrow 60 + \frac{x \times 10}{100} = 65 - \frac{x \times 15}{100} \Leftrightarrow 60 + 0,1x = 65 - 0,15x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,1x + 0,15x = 65 - 60 \Leftrightarrow 0,25x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0,25} \Leftrightarrow x = 20$$

Desta forma, o número total de pontos do Deodato é a soma dos pontos atribuídos ao carro e 20% dos pontos atribuídos à scooter, ou seja: $50 + 15 \times 0,2 = 50 + 3 = 53$

De forma correspondente, a Constança ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos à estada e 80% dos pontos atribuídos à scooter, ou seja: $60 + 10 \times 0,8 = 60 + 8 = 68$

Ou seja, os dois elementos da equipa ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- A Constança recebe estada e 20% da scooter.
- O Deodato recebe carro e 80% da scooter.



4.

4.1. Como $n = 0$ corresponde ao dia 1 de janeiro de 2000, temos que: $a(0) = 21$, assim, resolvendo a equação, podemos determinar o valor de b , arredondado às centésimas:

$$\begin{aligned} a(0) = 21 &\Leftrightarrow \frac{83}{1 + be^{-0,25 \times 0}} = 21 \Leftrightarrow \frac{83}{1 + be^0} = 21 \Leftrightarrow \frac{83}{21} = 1 + b \\ &\Leftrightarrow \frac{83}{21} - 1 = b \Rightarrow b \approx 2,95 \end{aligned}$$

4.2.

4.2.1. Inserimos na calculadora gráfica o modelo que dá a percentagem de horas de emissão diárias no dia 1 de janeiro de cada ano, após o ano 2000 ($y = \frac{83}{1 + 3,5e^{-0,25x}}$), e visualizamos a tabela de valores da função, procurando os valores compreendidos entre 65 e 74, como está reproduzida na figura ao lado.

Assim, podemos verificar que a percentagem de horas de emissão se situou entre 65% e 74%, no dia 1 de janeiro correspondem a 11, 12 e 13 anos após o ano 2000, ou seja nos anos:

2011, 2012 e 2013

X	Y1
9	60,633
10	64,476
11	67,824
12	70,683
13	73,082
14	75,066
15	76,688

4.2.2. Como se pode consultar na tabela do item anterior, no dia 1 de janeiro de 2011, a percentagem de horas de emissão diárias foi de 67,82% ($a(11) \approx 67,82$).

Assim, podemos calcular o número de horas de emissão, nesse dia:

$$24 \times \frac{67,82}{100} \approx 16,28 \text{ horas}$$

Como a empresa comprou 1% das horas de emissão, o número de horas comprado é:

$$16,28 \times \frac{1}{100} \approx 0,16 \text{ horas}$$

Traduzindo o valor anterior em minutos, arredondando o valor às unidades, temos:

$$0,16 \times 60 \approx 10 \text{ minutos}$$

Como o tempo adquirido para esta publicidade foi distribuído de igual forma pelos períodos da manhã e da tarde, a empresa terá pago 5 minutos a 1000 € e 5 minutos a 1200 €, ou seja o custo da publicidade, em euros, foi:

$$5 \times 1000 + 5 \times 1200 = 11\,000 \text{ €}$$



5.

- 5.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma, calcular a frequência relativa simples (a partir da frequência relativa acumulada, por subtrações sucessivas), multiplicar a frequência relativa simples pela marca de classe ($x_i \times fr_i$), como se apresenta na tabela seguinte:

Classes	Marca de classe	Frequência relativa acumulada (%)	Frequência relativa simples (%)	$x_i \times fr_i$
[20,30[$\frac{20+30}{2} = 25$	10	10	$25 \times 10 = 250$
[30,40[$\frac{30+40}{2} = 35$	30	$30 - 10 = 20$	$35 \times 20 = 700$
[40,50[$\frac{40+50}{2} = 45$	80	$80 - 30 = 50$	$45 \times 50 = 2250$
[50,60[$\frac{50+60}{2} = 55$	100	$100 - 80 = 20$	$55 \times 20 = 1100$

Assim, somando todos os produtos e dividindo por 100, obtemos uma aproximação à média de idades dos jornalistas:

$$\bar{x} = \frac{250 + 700 + 2250 + 1100}{100} = 43$$

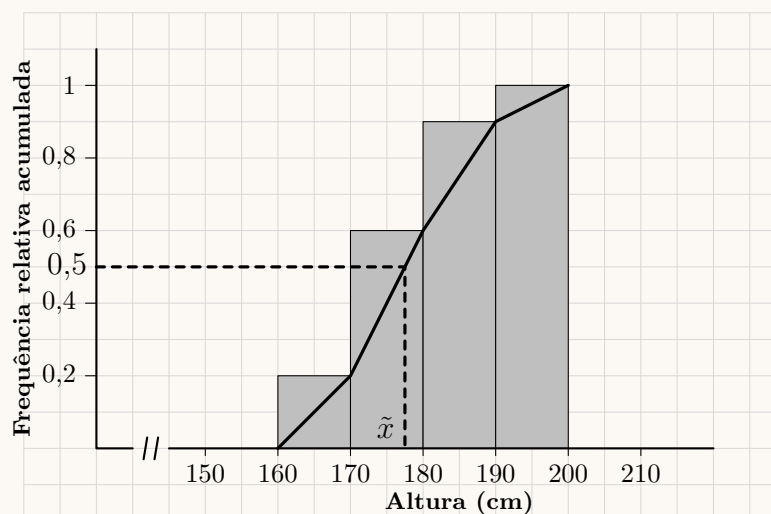
- 5.2. Começando por calcular o número total de jornalistas, as frequências relativas simples, e depois as frequências relativas acumuladas obtemos a tabela seguinte:

Altura (em centímetros)	Número de jornalistas	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
[160,170[4	$\frac{4}{20} = 0,2$	0,2
[170,180[8	$\frac{8}{20} = 0,4$	$0,2 + 0,4 = 0,6$
[180,190[6	$\frac{6}{20} = 0,3$	$0,6 + 0,3 = 0,9$
[190,200[2	$\frac{2}{20} = 0,1$	$0,9 + 0,1 = 1$
Total	20	1	—

Desta forma podemos observar que a classe mediana é a classe [170,180[, porque é a primeira classe que tem uma frequência relativa acumulada superior a 0,5.

A partir dos dados da tabela, desenhamos um histograma com as frequências relativas acumuladas e o polígono de frequências acumuladas.

Depois, identificando o ponto do polígono de frequências que corresponde à frequência relativa acumulada de valor 0,5, podemos determinar por processos geométricos o valor aproximado da altura mediana, como se apresenta no gráfico seguinte:



6. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

- A proporção amostral dos trabalhadores com, pelo menos, 75 quilogramas: $\hat{p} \approx 0,15$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, temos:

$$\left[0,15 - 2,576\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{n}}; 0,15 + 2,576\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{n}} \right]$$

E assim, a amplitude do intervalo, em função de n , é:

$$\begin{aligned} 0,15 + 2,576\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{n}} - \left(0,15 - 2,576\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{n}} \right) &= 2,576\sqrt{\frac{0,1275}{n}} + 2,576\sqrt{\frac{0,1275}{n}} = \\ &= 2 \times 2,576\sqrt{\frac{0,1275}{n}} = 5,152\sqrt{\frac{0,1275}{n}} \end{aligned}$$

Assim, a dimensão mínima da amostra, de modo que o intervalo de confiança, tenha uma amplitude inferior a 0,2, é o menor valor de n que satisfaz a condição seguinte:

$$5,152\sqrt{\frac{0,1275}{n}} < 0,2$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = 5,152\sqrt{\frac{0,1275}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, que está associado a um valor numérico da função inferior a 0,2, é $x = 85$

X	Y1
80	0,20568
81	0,20440
82	0,20315
83	0,20193
84	0,20072
85	0,19954
86	0,19837

Logo, podemos concluir que a dimensão mínima da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 85$$

7.

7.1. Para conseguir ocupar as três horas de emissão, o diretor deve selecionar os dois filmes ou então um filme e os três documentários.

Assim, designando os dois filmes por F1 e F2 e os três documentários por D1, D2 e D3, podemos organizar uma lista de contagem para determinar o número de sequências possíveis com os programas do mesmo tipo exibidos consecutivamente, ou seja, com os filmes no início ou no fim do alinhamento:

F1 - F2	F1 - D1 - D2 - D3	F2 - D1 - D2 - D3	D1 - D2 - D3 - F1	D1 - D2 - D3 - F2
F2 - F1	F1 - D1 - D3 - D2	F2 - D1 - D3 - D2	D1 - D3 - D2 - F1	D1 - D3 - D2 - F2
	F1 - D2 - D1 - D3	F2 - D2 - D1 - D3	D2 - D1 - D3 - F1	D2 - D1 - D3 - F2
	F1 - D2 - D3 - D1	F2 - D2 - D3 - D1	D2 - D3 - D1 - F1	D2 - D3 - D1 - F2
	F1 - D3 - D1 - D2	F2 - D3 - D1 - D2	D3 - D1 - D2 - F1	D3 - D1 - D2 - F2
	F1 - D3 - D2 - D1	F2 - D3 - D2 - D1	D3 - D2 - D1 - F1	D3 - D2 - D1 - F2

Podemos verificar que o número de sequências possíveis pode se calculado como $2 + 4 \times 6$, correspondente aos 2 alinhamento dos dois filmes somado com 6 alinhamentos dos 3 documentários multiplicados por 4, correspondente a colocar os dois filmes antes e depois dos documentários, ou seja, o número de sequências nas condições do enunciado são:

$$2 + 4 \times 6 = 2 + 24 = 26$$



7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um dos 100 espectadores, e os acontecimentos:

M : «O espectador ser mulher»

$F1$: «O espectador preferiu o primeiro filme»

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(M) = 0,4$, $P(\overline{F1}|M) = 0,3$ e $P(\overline{M} \cap \overline{F1}) = 0,42$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,4 = 0,6$
- $P(\overline{F1} \cap M) = P(\overline{F1}|M) \times P(M) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$
- $P(M \cap F1) = P(M) - P(M \cap \overline{F1}) = 0,4 - 0,12 = 0,28$
- $P(\overline{M} \cap F1) = P(\overline{M}) - P(\overline{M} \cap \overline{F1}) = 0,6 - 0,42 = 0,18$
- $P(F1) = P(M \cap F1) + P(\overline{M} \cap F1) = 0,28 + 0,18 = 0,46$

	M	\overline{M}	
$F1$	0,28	0,18	0,46
$\overline{F1}$	0,12	0,42	
	0,4	0,6	1

Desta forma, a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses espectadores, o mesmo ser mulher sabendo que preferiu o primeiro filme, é:

$$P(M|F1) = \frac{P(M \cap F1)}{P(F1)} = \frac{0,28}{0,46} \approx 0,609$$

E assim, o valor da probabilidade em percentagem, arredondado às unidades, é de 61%

