Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
2016 - Época especial

Proposta de resolução

1. Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

	N°. de votos	**615**	**300**	**435**	**150**	Total de votos	Vencedor
Par V-A	1.ª preferência	A	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	A	A	A	A: 615	
Par V-P	1.ª preferência	P	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	P	P	P	P: 615	
Par V-R	1.ª preferência	V	V	R	R	V: $615 + 300 = 915$	V
	2.ª preferência	R	R	V	V	R: $435 + 150 = 585$	

Como o ator V (Vasco Silva) venceu na comparação com todos os restantes é o ator vencedor.

Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

- Pontuação do ator A: $3 \times 615 + 2 \times 300 + 2 \times 435 + 1 \times 150 = 3465$
- Pontuação do ator P: $4 \times 615 + 1 \times 300 + 1 \times 435 + 2 \times 150 = 3495$
- Pontuação do ator R: $1 \times 615 + 3 \times 300 + 4 \times 435 + 4 \times 150 = 3855$
- Pontuação do ator V: $2 \times 615 + 4 \times 300 + 3 \times 435 + 3 \times 150 = 4185$

Como o ator V (Vasco Silva) é o que tem maior número de pontos, também é o vencedor decorrente da aplicação deste método.

2. Ordenando as distâncias entre os cinco edifícios registadas na tabela, temos:

$$\underset{E3-E5}{109} < \underset{E1-E4}{125} < \underset{E2-E3}{151} < \underset{E1-E2}{166} < \underset{E2-E5}{169} < \underset{E1-E3}{206} < \underset{E3-E4}{207} < \underset{E2-E4}{264} < \underset{E1-E5}{287} < \underset{E4-E5}{309}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta E3-E5 (109 m)

II- Aresta E1-E4 (125 m)

III- Aresta E2-E3 (151 m)

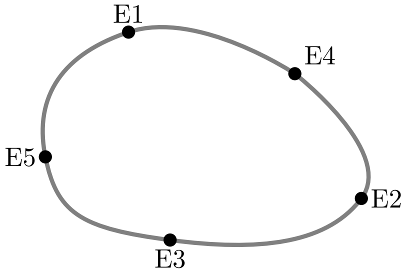
(não se considera a aresta E1-E2, porque se encontrariam três arestas no vértice E1)

(não se considera a aresta E2-E5, porque fecharia um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos)

(não se consideram as arestas E1-E3 e E3-E4, porque se encontrariam três arestas no vértice E3)

IV- Aresta E2-E4 (264 m)

V- Aresta E1-E5 (287 m)



Assim, um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3), é:

E3 → E5 → E1 → E4 → E2 → E3 → E5

3. Procedendo à partilha dos prémios, aplicando o método descrito, temos:

Prémios \ **Elementos da equipa**	**Constança**	**Deodato**
Carro	30	50
Estada	60	35
Scooter	10	15
Atribuição temporária	Estada	Carro + *Scooter*
Total temporário	60	$50 + 15 = 65$
Designação	B	A
Prémio usado no ajuste	*Scooter*	
Total final	$60 + \frac{x}{100} \times 10$	$65 - \frac{x}{100} \times 15$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$60 + \frac{x}{100} \times 10 = 65 - \frac{x}{100} \times 15 \Leftrightarrow 60 + \frac{x \times 10}{100} = 65 - \frac{x \times 15}{100} \Leftrightarrow 60 + 0{,}1x = 65 - 0{,}15x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1x + 0{,}15x = 65 - 60 \Leftrightarrow 0{,}25x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0{,}25} \Leftrightarrow x = 20$$

Desta forma, o número total de pontos do Deodato é a soma dos pontos atribuídos ao carro e 20% dos pontos atribuídos à *scooter*, ou seja: $50 + 15 \times 0{,}8 = 50 + 12 = 62$

De forma correspondente, a Constança ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos à estada e 80% dos pontos atribuídos à *scooter*, ou seja: $60 + 10 \times 0{,}2 = 60 + 2 = 62$

Ou seja, os dois elementos da equipa ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- A Constança recebe estada e 20% da *scooter*.
- O Deodato recebe carro e 80% da *scooter*.

4.

4.1. Como $n = 0$ corresponde ao dia 1 de janeiro de 2000, temos que: $a(0) = 21$, assim, resolvendo a equação, podemos determinar o valor de b, arredondado às centésimas:

$$a(0) = 21 \Leftrightarrow \frac{83}{1 + be^{-0,25\times 0}} = 21 \Leftrightarrow \frac{83}{1 + be^{0}} = 21 \Leftrightarrow \frac{83}{21} = 1 + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{83}{21} - 1 = b \Rightarrow b \approx 2{,}95$$

4.2.

4.2.1. Inserimos na calculadora gráfica o modelo que dá a percentagem de horas de emissão diárias no dia 1 de janeiro de cada ano, após o ano 2000 ($y = \frac{83}{1 + 3{,}5e^{-0{,}25x}}$), e visualizamos a tabela de valores da função, procurando os valores compreendidos entre 65 e 74, como está reproduzida na figura ao lado.

X	Y1
9	60,633
10	64,476
11	67,824
12	70,683
13	73,082
14	75,066
15	76,688

Assim, podemos verificar que a percentagem de horas de emissão se situou entre 65% e 74%, no dia 1 de janeiro correspondem a 11, 12 e 13 anos após o ano 2000, ou seja nos anos:

$$2011, 2012 \text{ e } 2013$$

4.2.2. Como se pode consultar na tabela do item anterior, no dia 1 de janeiro de 2011, a percentagem de horas de emissão diárias foi de 67,82% ($a(11) \approx 67{,}82$).

Assim, podemos calcular o número de horas de emissão, nesse dia:

$$24 \times \frac{67{,}82}{100} \approx 16{,}28 \text{ horas}$$

Como a empresa comprou 1% das horas de emissão, o número de horas comprado é:

$$16{,}28 \times \frac{1}{100} \approx 0{,}16 \text{ horas}$$

Traduzindo o valor anterior em minutos, arredondando o valor às unidades, temos:

$$0{,}16 \times 60 \approx 10 \text{ minutos}$$

Como o tempo adquirido para esta publicidade foi distribuído de igual forma pelos períodos da manhã e da tarde, a empresa terá pago 5 minutos a 1000 € e 5 minutos a 1200 €, ou seja o custo da publicidade, em euros, foi:

$$5 \times 1000 + 5 \times 1200 = 11\,000 \text{ €}$$

5.

5.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma, calcular a frequência relativa simples (a partir da frequência relativa absoluta, por subtrações sucessiva), multiplicar a frequência relativa simples pela marca de classe ($x_i \times fr_i$), como se apresenta na tabela seguinte:

Classes	Marca de classe	Frequência relativa acumulada (%)	Frequência relativa simples (%)	$x_i \times fr_i$
[20,30[	$\frac{20+30}{2} = 25$	10	10	$25 \times 10 = 250$
[30,40[	$\frac{30+40}{2} = 35$	30	$30 - 10 = 20$	$35 \times 20 = 700$
[40,50[	$\frac{40+50}{2} = 45$	80	$80 - 30 = 50$	$45 \times 50 = 2250$
[50,60[	$\frac{50+60}{2} = 55$	100	$100 - 80 = 20$	$55 \times 20 = 1100$

Assim, somando todos os produtos e dividindo por 100, obtemos uma aproximação à média de idades dos jornalistas:

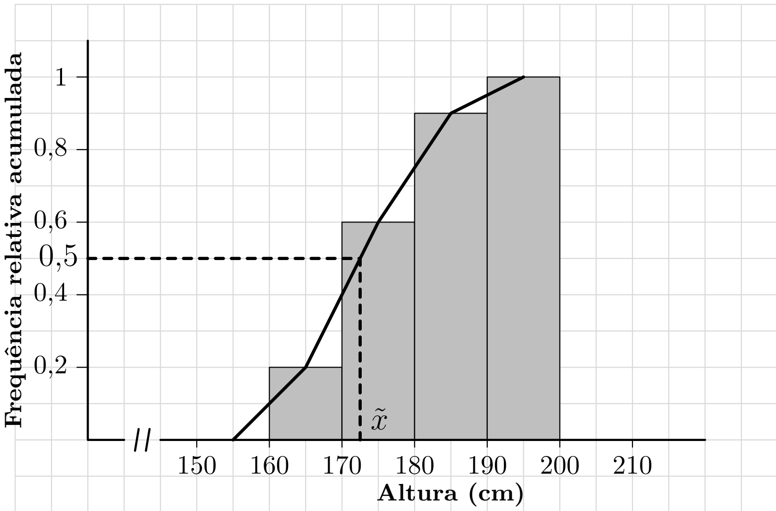
$$\overline{x} = \frac{250 + 700 + 2250 + 1100}{100} = 43$$

5.2. Começando por calcular o número total de jornalistas, as frequências relativas simples, e depois as frequências relativas acumuladas obtemos a tabela seguinte:

Altura (em centímetros)	Número de jornalistas	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
[160,170[	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	0,2
[170,180[	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$	$0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$
[180,190[	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	$0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$
[190,200[	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$0{,}9 + 0{,}1 = 1$
Total	20	1	—

Desta forma podemos observar que a classe modal é a classe [170,180[, porque é a primeira classe que tem uma frequência relativa acumulada superior a 0,5.

A partir dos dados da tabela, desenhamos um histograma com as frequências relativas acumuladas e o polígono de frequências acumuladas.
Depois, identificando o ponto do polígono de frequências que corresponde à frequência relativa acumulada de valor 0,5, podemos determinar por processos geométricos o valor aproximado da altura mediana, como se apresenta no gráfico seguinte:



6. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

   - A proporção amostral dos trabalhadores com, pelo menos, 75 quilogramas: $\hat{p} \approx 0{,}15$
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] 0{,}15 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} \; ; \; 0{,}15 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} \right[$$

   E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$0{,}15 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}} - \left(0{,}15 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{n}}\right) = 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} =$$

$$= 2 \times 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} = 5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}}$$

   Assim, a dimensão mínima da amostra, de modo que o intervalo de confiança, tenha uma amplitude inferior a 0,2, é o menor valor de n que satisfaz a condição seguinte:

$$5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{n}} < 0{,}2$$

   Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = 5{,}152\sqrt{\frac{0{,}1275}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, que está associado a um valor numérico da função inferior a 0,2, é $x = 85$

   Logo, podemos concluir que a dimensão mínima da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 85$$

X	Y1
80	0,20568
81	0,20440
82	0,20315
83	0,20193
84	0,20072
85	0,19954
86	0,19837

7.

   7.1. Para conseguir ocupar as três horas de emissão, o diretor deve selecionar os dois filmes ou então um filme e os três documentários.
   Assim, designando os dois filmes por F1 e F2 e os três documentários por D1, D2 e D3, podemos organizar uma lista de contagem para determinar o número de sequências possíveis com os programas do mesmo tipo exibidos consecutivamente, ou seja, com os filmes no início ou no fim do alinhamento:

F1 - F2	F1 - D1 - D2 - D3	F2 - D1 - D2 - D3	D1 - D2 - D3 - F1	D1 - D2 - D3 - F2
F2 - F1	F1 - D1 - D3 - D2	F2 - D1 - D3 - D2	D1 - D3 - D2 - F1	D1 - D3 - D2 - F2
	F1 - D2 - D1 - D3	F2 - D2 - D1 - D3	D2 - D1 - D3 - F1	D2 - D1 - D3 - F2
	F1 - D2 - D3 - D1	F2 - D2 - D3 - D1	D2 - D3 - D1 - F1	D2 - D3 - D1 - F2
	F1 - D3 - D1 - D2	F2 - D3 - D1 - D2	D3 - D1 - D2 - F1	D3 - D1 - D2 - F2
	F1 - D3 - D2 - D1	F2 - D3 - D2 - D1	D3 - D2 - D1 - F1	D3 - D2 - D1 - F2

   Podemos verificar que o número de sequências possíveis pode se calculado como $2 + 4 \times 6$, correspondente aos 2 alinhamento dos dois filmes somado com 6 alinhamentos dos 3 documentários multiplicados por 4, correspondente a colocar os dois filmes antes e depois dos documentários, ou seja, o número de sequências nas condições do enunciado são:

$$2 + 4 \times 6 = 2 + 24 = 26$$

7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um dos 100 espectadores, e os acontecimentos:

M:≪O espectador ser mulher≫

$F1$:≪O espectador preferiu o primeiro filme≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(M) = 0{,}4$, $P\left(\overline{F1}|M\right) = 0{,}3$ e $P\left(\overline{M} \cap \overline{F1}\right) = 0{,}42$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
- $P\left(\overline{F1} \cap M\right) = P\left(\overline{F1}|M\right) \times P(M) = 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}12$
- $P(M \cap F1) = P(M) - P\left(M \cap \overline{F1}\right) = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28$
- $P\left(\overline{M} \cap F1\right) = P\left(\overline{M}\right) - P\left(\overline{M} \cap \overline{F1}\right) = 0{,}6 - 0{,}42 = 0{,}18$
- $P(F1) = P(M \cap F1) + P\left(\overline{M} \cap F1\right) = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$

	M	$\overline{M}$	
$F1$	0,28	0,18	0,46
$\overline{F1}$	0,12	0,42	
	0,4	0,6	1

Desta forma, a probabilidade de, escolhendo ao acaso um desses espectadores, o mesmo ser mulher sabendo que preferiu o primeiro filme, é:

$$P(M|F1) = \frac{P(M \cap F1)}{P(F1)} = \frac{0{,}28}{0{,}46} \approx 0{,}609$$

E assim, o valor da probabilidade em percentagem, arredondado às unidades, é de 61%