# Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2016, 1.ª fase)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito para os 900 votos conhecidos, temos:

   - Pontuação da banda A: $4 \times 200 + 3 \times 400 + 1 \times 300 = 2300$
   - Pontuação da banda B: $3 \times 200 + 4 \times 400 + 2 \times 300 = 2800$
   - Pontuação da banda C: $2 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 300 = 2400$
   - Pontuação da banda D: $1 \times 200 + 1 \times 400 + 3 \times 300 = 1500$

   Desta forma temos que a banda C não poderá atuar em primeiro lugar porque, mesmo na eventualidade dos 100 votos em falta escolherem a lista C na 1.ª preferência e a lista B na 4.ª preferência, a lista B obteria a maioria dos votos:

   - Pontuação da banda B: $2800 + 1 \times 100 = 2900$
   - Pontuação da banda C: $2400 + 4 \times 100 = 2800$

   E em qualquer outro cenário a pontuação da banda B seria superior, ou a pontação da banda C seria inferior.

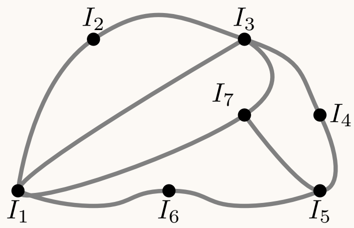
   Analisando os diferentes cenários, podemos calcular as diferentes pontuações finais de cada banda:

| **Preferência** \ **Banda** | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **1ª** | $2300 + 4 \times 100 =$ $= 2700$ | $2800 + 4 \times 100 =$ $= 3200$ | $2400 + 4 \times 100 =$ $= 2800$ | $1500 + 4 \times 100 =$ $= 1900$ |
| **2ª** | $2300 + 3 \times 100 =$ $= 2600$ | $2800 + 3 \times 100 =$ $= 3100$ | $2400 + 3 \times 100 =$ $= 2700$ | $1500 + 3 \times 100 =$ $= 1800$ |
| **3ª** | $2300 + 2 \times 100 =$ $= 2500$ | $2800 + 2 \times 100 =$ $= 3000$ | $2400 + 2 \times 100 =$ $= 2600$ | $1500 + 2 \times 100 =$ $= 1700$ |
| **4ª** | $2300 + 1 \times 100 =$ $= 2400$ | $2800 + 1 \times 100 =$ $= 2900$ | $2400 + 1 \times 100 =$ $= 2500$ | $1500 + 1 \times 100 =$ $= 1600$ |

   Assim, podemos verificar que existem cenários para os 100 votos em falta que originam pontuações iguais entre duas bandas, como por exemplo:

| Preferência | **1.ª** | **2.ª** | **3.ª** | **4.ª** |
|---|---|---|---|---|
| **Banda** | A | C | B | D |
| **Pontuação final** | 2700 | 2700 | 3000 | 1600 |

2. De acordo com a imagem obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma infraestrutura e cada aresta representa um troço pedonal.




Determinando o grau de cada vértice, temos:

| **Vértices** | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ | $I_6$ | $I_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grau** | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 |

Desta forma, como existem dois vértices com grau ímpar (os vértices $I_5$ e $I_7$), o grafo não admite circuitos de Euler, ou seja, circuitos que percorram todas as arestas, percorrendo cada aresta uma única vez. No contexto da situação descrita significa que não é possível percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, ou seja, a conclusão do vigilante é verdadeira.

Considerando a duplicação da aresta que une os vértices $I_5$ e $I_7$, todos os vértices ficarão com grau par, o que significa que é possível identificar um circuito de Euler no grafo, ou seja, o troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura é o troço que une as infraestruturas $I_5$ e $I_7$.

3. Determinando o custo total, em euros, do aluguer do palco principal, temos:

- custo da taxa diária de utilização para 6 dias: $U = 1250 \times 6 = 7500$ €
- deslocação do equipamento para uma distância de 50 km:
  - 30 km pagos a 25 €: $D_1 = 30 \times 25 = 750$ €
  - 20 km pagos a 27,5 €: $D_2 = 20 \times 27{,}5 = 550$ €

  custos totais com a deslocação: $D = 750 + 550 = 1300$ €
- custos com a montagem e a desmontagem do palco (8 funcionários num total de 5 horas, ou seja, de acordo com a tabela o valor de cada hora é 150 €): $M = 8 \times 5 \times 150 = 6000$ €

Assim, a soma das três parcelas anteriores, ou seja, o custo total, em euros, do aluguer do palco principal, é:

$$\text{Custo total } = U + D + M = 7500 + 1300 + 6000 = 14\,800 \text{ €}$$

4. De acordo com o algoritmo, e após a ordenação aleatória, como Gomes foi o único que retificou a parcela, temos que a **primeira volta** decorreu da forma seguinte:

- Barros escolheu uma parcela.
- Fernão não retificou e passou a parcela a Gomes.
- Gomes **retificou** a parcela e passou-a a Lemos.
- Lemos não retificou e **atribui** a parcela a Gomes (porque foi o último que a retificou).

Como, na **segunda volta** ninguém retificou a parcela, esta volta decorreu da forma seguinte:

- Lemos escolheu uma parcela, por ser o representante a seguir a Gomes.
- Santos não retificou e passou a parcela a Barros.
- Barros não retificou e passou a parcela a Fernão.
- Fernão não retificou e **atribui** a parcela a Lemos (porque foi o primeiro desta volta).

Como, na **terceira volta** Fernão e Barros retificaram a parcela, esta volta decorreu da forma seguinte:

- Santos escolheu uma parcela, por ser o representante a seguir a Lemos.
- Barros **retificou** a parcela e passou-a a Fernão.
- Fernão **retificou** a parcela e passou-a a Santos.
- Santos não retificou e **atribui** a parcela a Fernão (porque foi o último que a retificou).

Assim, nas primeiras três voltas os representantes a quem foram atribuídas parcelas foram: Gomes (primeira volta); Lemos (segunda volta) e Fernão (terceira volta).

5.

5.1. De acordo com os dados da tabela, temos que:

- o número total de pessoas é $1540 + 2720 + 840 + 680 = 5780$
- o número de pessoas que estavam na tenda Dance é $1540 + 2720 = 4260$

Assim, a probabilidade de duas pessoas, escolhidas aleatoriamente, uma a seguir à outra, estarem na tenda Dance é:

$$\underbrace{\frac{4260}{5780}}_{\substack{\text{1.ª pessoa} \\ \text{estar na} \\ \text{tenda Dance}}} \times \underbrace{\frac{4259}{5779}}_{\substack{\text{2.ª pessoa} \\ \text{estar na} \\ \text{tenda Dance,} \\ \text{sabendo que} \\ \text{a 1.ª também} \\ \text{estava.}}} \approx 0{,}54$$

Logo, a probabilidade na forma de percentagem, arredondado às unidades, é 54%

5.2. Como a afluência à tenda Tecno correspondeu a 20% do total das pessoas que se dividiram pelas três tendas, o total das pessoas que estiverem nas tendas Dance e Chill (5780 de acordo com os cálculos do item anterior) corresponde a 80% do total.

Assim temos que o número de pessoas que estiveram nas três tendas ($t$), é:

$$\frac{t}{5780} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow t = \frac{5780 \times 100}{80} \Leftrightarrow t = 7225$$

Logo, o número de pessoas que estiveram na tenda Tecno, é:

$$7225 \times 0{,}2 = 1445$$

Como $\frac{3}{5}$ eram mulheres, o número de homens que estiveram na tenda Tecno é $\frac{2}{5}$ do valor anterior, ou seja:

$$1445 \times \frac{2}{5} = 578$$

5.3. Como a amostra (pessoas presentes na tenda Chill) tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 840 + 680 = 1520$
- A proporção amostral de mulheres, arredondada com cinco casas decimais: $\hat{p} = \frac{250}{800} = 0{,}44737$
- O valor de $z$ para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left( \left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[ \right)$, e arredondando os valores com cinco casas decimais, temos:

$$\left] 0{,}44737 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}44737(1-0{,}44737)}{1520}} \; ; \; 0{,}44737 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}44737(1-0{,}44737)}{1520}} \right[ \approx ]0{,}42639; 0{,}46835[$$

Logo, o intervalo de confiança a 90%, para a proporção de mulheres presentes, por dia, na tenda Chill, no decurso do festival com os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades, é $]\,43\%\,;\,47\%\,[$

6.

6.1. Como existem 15 registos (referentes aos 15 dias do festival), para que o número médio de elementos da organização presentes, por dia, nessa edição do MaréFest, seja 90, temos que a soma ($S$) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{15} = 90 \Leftrightarrow S = 90 \times 15 \Leftrightarrow S = 1350$$

Assim, subtraindo ao valor de $S$ os valores dos registos conhecidos, temos:

$$1350 - 75 - 77 - 77 - 80 - 80 - 83 - 88 - 93 - 99 - 100 - 100 - 102 - 105 - 105 = 86$$

Desta forma o registo a que se reporta o valor de $a$ representa o valor 86, ou seja:

$$a = 86 - 80 = 6$$

6.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores do diagrama, e considerando $a = 8$:

$$75 \quad 77 \quad 77 \quad 80 \quad 80 \quad 83 \quad 88 \quad 88 \quad 93 \quad 99 \quad 100 \quad 100 \quad 102 \quad 105 \quad 105$$

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores do 1.º quartil e da mediana da distribuição de 2010:

$$q_1 = 80 \text{ e } \tilde{x} = 88$$

Observando o diagrama de extremos e quais apresentado, temos que os valores do 1.º quartil e da mediana da distribuição de 2011, são:

$$q_1 = 80 \text{ e } \tilde{x} = 100$$

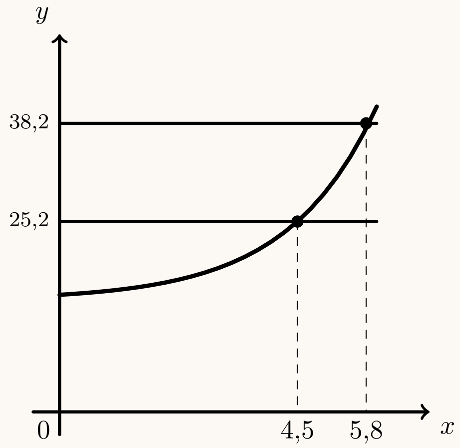
Assim temos que o número de elementos da organização presentes, por dia, no recinto do MaréFest situados entre o 1.º quartil e a mediana, estão dispersos por um intervalo de amplitude $88 - 80 = 8$ na distribuição de 2010 e num intervalo de amplitude $100 - 80 = 20$ na distribuição de 2011.
Assim, podemos concluir que estes dados estão mais dispersos na distribuição de 2011, ou seja, estão mais concentrados na distribuição de 2010, pelo que a afirmação é verdadeira.

7.

7.1. Como o modelo dá a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest, $t$ horas após o início da transmissão, ou seja $t$ horas após as 20h00, a percentagem de ouvintes às 22h00, arredondada às décimas, é:

$$r(2) = 14{,}8 + 0{,}7e^{0{,}6\times 2} \approx 17{,}1\%$$

7.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da percentagem de ouvintes em função do tempo ($y = 14{,}8 + 0{,}7e^{0{,}6x}$) e das retas correspondentes às percentagens de 25,2% euros e de $25{,}2 + 13 = 38{,}2\%$ ($y = 25{,}2$ e $y = 38{,}2$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 6$ e também com os valores esperados para a percentagem de ouvintes, ou seja, $0 \leq y < 50$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.




Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que a percentagem de ouvintes era, respetivamente 25,2% e 38,2%, ou seja, os pontos de coordenadas $(4{,}5\,;\,25{,}2)$ e $(5{,}8\,;\,38{,}2)$

Assim, temos que a hora de início da atuação da banda principal corresponde a $t = 4{,}5$, ou seja, 4 horas e meia após as 20h00, isto é, às 00h30.

Da mesma, podemos concluir que a hora de conclusão da atuação da banda principal corresponde a $t = 5{,}8$, ou seja, 5,8 horas 20h00. Como 0,8 horas correspondem a $0{,}8 \times 60 = 48$ minutos, a hora de conclusão foi às 01h48.

Ou seja, a banda principal atuou entre as 00h30 e as 01h48.