

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2016, 2.ª fase)
Proposta de resolução



1. Aplicando o método descrito aos resultados da votação, temos:

| Lista | W | X | Y | Z |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| Número de votos | 498 | 100 | 804 | 98 |
| Total de votos | $498 + 100 + 804 + 98 = 1500$ | | | |
| Divisor padrão | $\frac{1500}{12} = 125$ | | | |
| Quota padrão | $\frac{498}{125} \approx 3,98$ | $\frac{100}{125} = 0,8$ | $\frac{804}{125} \approx 6,43$ | $\frac{98}{125} \approx 0,78$ |
| Quota arredondada | $3 + 1 = 4$ | $0 + 1 = 1$ | $6 + 1 = 7$ | $0 + 1 = 1$ |
| Total provisório | $4 + 1 + 7 + 1 = 13$ | | | |
| Divisor modificado | $125 + 10 = 135$ | | | |
| Quota padrão modificada | $\frac{498}{135} \approx 3,69$ | $\frac{100}{135} \approx 0,74$ | $\frac{804}{135} \approx 5,96$ | $\frac{98}{135} \approx 0,73$ |
| Quota arredondada modificada | $3 + 1 = 4$ | $0 + 1 = 1$ | $5 + 1 = 6$ | $0 + 1 = 1$ |
| Total | $4 + 1 + 6 + 1 = 12$ | | | |

Assim, a constituição da assembleia-geral do SCC resultante da aplicação do método descrito, é:

- Lista W: 4 mandatos
- Lista X: 1 mandato
- Lista Y: 6 mandatos
- Lista Z: 1 mandato

2. Temos que o número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é 24, porque $\frac{47}{2} = 23,5$

Aplicando o método descrito, temos que o número de primeiras preferências de cada candidato é:

- Candidato E: 7 votos
- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: 9 votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato E, a tabela reestruturada é a seguinte:

| Nº. de votos | 11 | 14 | 7 | 6 | 9 |
|----------------|----|----|---|---|---|
| Preferência | | | | | |
| 1 ^a | F | G | H | F | H |
| 2 ^a | G | H | F | H | G |
| 3 ^a | H | F | G | G | F |

Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: $7 + 9 = 16$ votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato G, a tabela reestruturada é a seguinte:

| Nº. de votos | 11 | 14 | 7 | 6 | 9 |
|----------------|----|----|---|---|---|
| Preferência | | | | | |
| 1 ^a | F | H | H | F | H |
| 2 ^a | H | F | F | H | F |

Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato H: $14 + 7 + 9 = 30$ votos

Como o candidato H (Henrique) tem a maioria absoluta das primeiras preferências é o candidato eleito para ser o porta-estandarte.

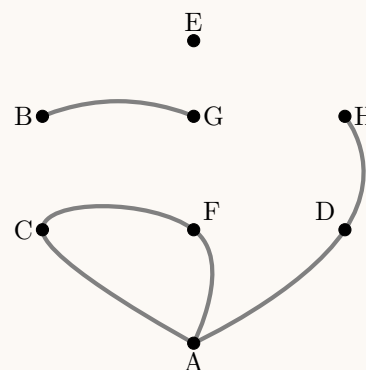
Analisando a primeira contagem de votos na primeira preferência, podemos verificar que o candidato declarado vencedor, por aplicação do método descrito (H), não foi o que teve maior número de votos na primeira preferência (F).



3. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma modalidade e cada aresta representa a compatibilidade dentro do mesmo bloco.

Assim temos que devem ser construídos blocos para as seguintes modalidades:

- Modalidade E (não é compatível com qualquer outra).
- Modalidades B e G.
- Modalidades H e D.
- Modalidades A, C e F.



Assim, temos que, é necessário construir, no mínimo, quatro blocos.

4.

- 4.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um dos candidatos, e os acontecimentos:

M : «O candidato é mulher»

S : «O candidato é sénior»

Como o número de mulheres é $4 + b$, considerando t como o número total de candidatos, temos que:

$$P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{b}{t}}{\frac{4+b}{t}} = \frac{b}{4+b}$$

Como, de acordo com o enunciado, $P(S|M) = \frac{1}{5}$, vem que:

$$\frac{b}{4+b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5b = 4+b \Leftrightarrow 4b = 4 \Leftrightarrow b = \frac{4}{4} \Leftrightarrow b = 1$$

Da mesma forma, temos que:

$$P(\overline{M}|S) = \frac{P(\overline{M} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{a}{t}}{\frac{a+b}{t}} = \frac{a}{a+b}$$

Como $b = 1$ e, de acordo com o enunciado $P(\overline{M}|S) = \frac{4}{5}$, temos que:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5a = 4(a+1) \Leftrightarrow 5a = 4a+4 \Leftrightarrow 5a-4a = 4 \Leftrightarrow a = 4$$

Assim, o número de candidatos seniores é:

$$a + b = 4 + 1 = 5$$



- 4.2. Como se admita que já foram selecionados quatro juniores e um sénior, faltando selecionar apenas sexto jurado, a variável X pode tomar os valores 4 ou 5.

Assim, temos que, para a seleção do sexto jurado, como já foram selecionados 5 candidatos (4 juniores e 1 sénior) existem:

- $10 + 6 + 4 + 10 - 5 = 25$ candidatos possíveis,
- $10 + 4 - 4 = 10$ juniores,
- $6 + 10 - 1 = 15$ seniores.

Assim, temos que:

- A probabilidade do sexto jurado selecionado ser sénior, é $P(X = 4) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
- A probabilidade do sexto jurado selecionado ser júnior, é $P(X = 5) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X , com os valores na forma de fração irredutível, é:

| | | |
|--------------|---------------|---------------|
| x_i | 4 | 5 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

5.

- 5.1. As 12 horas do dia 15 de janeiro correspondem a 14 dias e meio após as zero horas do dia 1 de janeiro, ou seja, ao valor $t = 14,5$, pelo que o valor de cada PRC, em euros, arredondado com quatro casas decimais, era:

$$v(14,5) = \frac{1,85}{1 + 12e^{-0,33 \times 14,5}} \approx 1,6814 \text{ €}$$

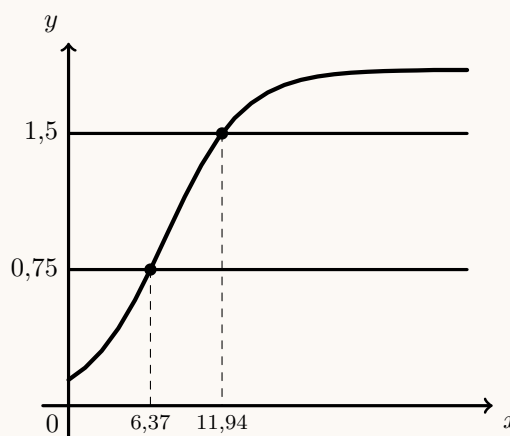
Como o Francisco pretende obter 1500 PRC, a quantia (q), em euros, que deve trocar, é:

$$\frac{1}{1500} = \frac{1,6814}{q} \Leftrightarrow q = 1,6814 \times 1500 \Leftrightarrow q \approx 2522 \text{ €}$$

- 5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação do valor de cada PRC em função do tempo ($y = \frac{1,85}{1 + 12e^{-0,33x}}$) e das retas correspondentes às taxas de câmbio de 0,75 euros e de 1,5 euros ($y = 0,75$ e $y = 1,5$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 31$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 2$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que a taxa de câmbio era, respetivamente 0,75 € e 1,5 €, ou seja, os pontos de coordenadas (6,37; 0,75) e (11,94; 1,5)

Assim, como o período de tempo em que a taxa de câmbio esteve entre os 0,75 € e os 1,15 € é de $11,94 - 6,37 = 5,57$ dias, os dois amigos não estiveram em Parcóvia, simultaneamente, durante dez dias consecutivos.



6.

6.1.

6.1.1. Determinando a frequência cardíaca do atleta vencedor em 2012, ou seja, o valor de P , sabendo que a média dos valores da tabela é 166,5, temos:

$$\frac{165 + 166 + 166 + 168 + 170 + 170 + P + 160 + 160 + 168}{10} = 166,5 \Leftrightarrow \frac{1493 + P}{10} = 166,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1493 + P = 166,5 \times 10 \Leftrightarrow 1493 + P = 1665 \Leftrightarrow P = 1665 - 1493 \Leftrightarrow P = 172$$

Desta forma podemos constatar que a primeira afirmação é falsa, porque o atleta vencedor em 2012 terminou a maratona com uma frequência cardíaca superior a 171 pulsações por minuto.

Considerando o valor de $P = 172$ e ordenando os dados da tabela podemos verificar que os valores centrais, são 166 e 168:

$$\underbrace{160 \ 160 \ 165 \ 166 \ 166}_{50\%} \quad \underbrace{168 \ 168 \ 170 \ 170 \ 172}_{50\%}$$

Assim, temos que a mediana, \tilde{x} , das frequências cardíacas é: $\tilde{x} = \frac{166 + 168}{2} = 167$

Logo a segunda afirmação é falsa, porque a mediana não é 170.

Observando o diagrama de dispersão, podemos verificar que uma variação dos valores da temperatura ambiente estão corresponde a uma variação semelhante dos valores da frequência cardíaca dos atletas, ou seja, o aumento da temperatura está associado a um aumento da frequência cardíaca, o que representa uma correlação linear positiva, pelo que o respetivo coeficiente de correlação é positivo.

Assim, a terceira afirmação é falsa, porque o coeficiente de correlação linear não pode ser negativo.

6.1.2. De acordo com a reta ajustada ao diagrama de dispersão, a temperatura ambiente registada no final da maratona, no ano de 2006, é o valor de x correspondente ao valor de $y = 165$, ou seja a frequência cardíaca do atleta vencedor nesse ano.

Assim, substituindo o valor de y na equação da reta e determinando o valor corresponde de x , temos:

$$165 = 0,71x + 147,1 \Leftrightarrow 165 - 147,1 = 0,71x \Leftrightarrow 17,9 = 0,71x \Leftrightarrow \frac{17,9}{0,71} = x$$

Como $\frac{17,9}{0,71} \approx 25,2$ podemos concluir que, de acordo com a reta ajustada do diagrama, 31,7 °C não é um valor admissível da temperatura ambiente registada no final da maratona, no ano de 2006, por ser bastante diferente do valor esperado (25,2 °C).



6.2. Como a dimensão da amostra recolhida pela Eduarda tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 300$
- A média amostral: $\bar{x} = 3$ horas, ou seja $3 \times 60 = 180$ minutos
- O desvio padrão amostral: $s = 45$ minutos
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left] 180 - 2,576 \times \frac{45}{\sqrt{300}} ; 180 + 2,576 \times \frac{45}{\sqrt{300}} \left[\approx]173,307; 186,693[$$

Assim, como 3 horas e 15 minutos correspondem a $3 \times 60 + 15 = 195$ minutos, podemos verificar que este valor não pertence ao intervalo de confiança para o valor médio do tempo de duração da maratona.

Assim podemos afirmar com 99% de confiança que o tempo médio da duração foi inferior a 3 horas e 15 minutos, ou seja, que a Eduarda tinha razão para duvidar da afirmação do bloguista.

7. Determinando o valor debitado na conta da Eduarda, temos:

- O valor de 1200 PRC em euros: $1200 \times 0,8 = 960$ euros
- O valor da taxa de 0,96%: $960 \times 0,0096 = 9,216$ euros

Assim, como o valor debitado é a soma do valor em euros e das duas taxas aplicadas, o valor total, em euros, arredondado às centésimas, é:

$$960 + 9,216 + 3,52 \approx 972,74 \text{ euros}$$

