Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
2016 - 2.ª Fase

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito aos resultados da votação, temos:

Lista	W	X	Y	Z
Número de votos	498	100	804	98
Total de votos	$498 + 100 + 804 + 98 = 1500$			
Divisor padrão	$\frac{1500}{12} = 125$			
Quota padrão	$\frac{498}{125} \approx 3{,}98$	$\frac{100}{125} = 0{,}8$	$\frac{804}{125} \approx 6{,}43$	$\frac{98}{125} \approx 0{,}78$
Quota arredondada	$3 + 1 = 4$	$0 + 1 = 1$	$6 + 1 = 7$	$0 + 1 = 1$
Total provisório	$4 + 1 + 7 + 1 = 13$			
Divisor modificado	$125 + 10 = 135$			
Quota padrão modificada	$\frac{498}{135} \approx 3{,}69$	$\frac{100}{135} \approx 0{,}74$	$\frac{804}{135} \approx 5{,}96$	$\frac{98}{135} \approx 0{,}73$
Quota arredondada modificada	$3 + 1 = 4$	$0 + 1 = 1$	$5 + 1 = 6$	$0 + 1 = 1$
Total	$4 + 1 + 6 + 1 = 12$			

Assim, a constituição da assembleia-geral do SCC resultante da aplicação do método descrito, é:

- Lista W: 4 mandatos
- Lista X: 1 mandato
- Lista Y: 6 mandatos
- Lista Z: 1 mandato

2. Temos que o número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é 24, porque $\frac{47}{2} = 23{,}5$

Aplicando o método descrito, temos que o número de primeiras preferências de cada candidato é:

- Candidato E: 7 votos
- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: 9 votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato E, a tabela reestruturada é a seguinte:

Preferência \ **Nº. de votos**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	G	H	F	H
2ª	G	H	F	H	G
3ª	H	F	G	G	F

Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: $7 + 9 = 16$ votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato G, a tabela reestruturada é a seguinte:

Preferência \ **Nº. de votos**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	H	H	F	H
2ª	H	F	F	H	F

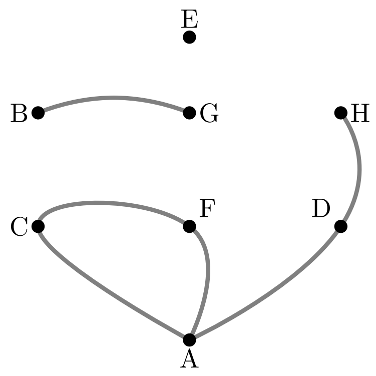
Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato H: $14 + 7 + 9 = 30$ votos

Como o candidato H (Henrique) tem a maioria absoluta das primeiras preferências é o candidato eleito para ser o porta-estandarte.

Analisando a primeira contagem de votos na primeira preferência, podemos verificar que o candidato declarado vencedor, por aplicação do método descrito (H), não foi o que teve maior número de votos na primeira preferência (F).

3. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma modalidade e cada aresta representa a compatibilidade dentro do mesmo bloco.

   Assim temos que devem ser construídos blocos para as seguintes modalidades:

   - Modalidade E (não é compatível com qualquer outra).
   - Modalidades B e G.
   - Modalidades H e D.
   - Modalidades A, C e F.

   Assim, temos que é necessário construir, no mínimo quatro blocos.

4.

   4.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um dos candidatos, e os acontecimentos:
   M:≪O candidato é mulher≫
   S:≪O candidato é sénior≫

   Como o número de mulheres é $4+b$, considerando t como o número total de candidatos, temos que:

   $$P\left(S|M\right)=\frac{P\left(S\cap M\right)}{P(M)}=\frac{\frac{b}{t}}{\frac{4+b}{t}}=\frac{b}{4+b}$$

   Como, de acordo com o enunciado, $P\left(S|M\right)=\frac{1}{5}$, vem que:

   $$\frac{b}{4+b}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5b=4+b\Leftrightarrow 4b=4\Leftrightarrow b=\frac{4}{4}\Leftrightarrow b=1$$

   Da mesma forma, temos que:

   $$P\left(\overline{M}|S\right)=\frac{P\left(\overline{M}\cap S\right)}{P(S)}=\frac{\frac{a}{t}}{\frac{a+b}{t}}=\frac{a}{a+b}$$

   Como $b=1$ e, de acordo com o enunciado $P\left(\overline{M}|S\right)=\frac{4}{5}$, temos que:

   $$\frac{a}{a+1}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow 5a=4(a+1)\Leftrightarrow 5a=4a+4\Leftrightarrow 5a-4a=4\Leftrightarrow a=4$$

   Assim, o número de candidatos seniores é:

   $$a+b=4+1=5$$

4.2. Como se admita que já foram selecionados quatro juniores e um sénior, faltando selecionar apenas sexto jurado, a variável X pode tomar os valores 4 ou 5.

Assim, temos que, para a seleção do sexto jurado, como já foram selecionados 5 candidatos (4 juniores e 1 sénior) existem:

- $10 + 6 + 4 + 10 - 5 = 25$ candidatos possíveis,
- $10 + 4 - 4 = 10$ juniores,
- $6 + 10 - 1 = 15$ seniores.

Assim, temos que:

- A probabilidade do sexto jurado selecionado ser sénior, é $P(X = 4) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
- A probabilidade do sexto jurado selecionado ser júnior, é $P(X = 5) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, com os valores na forma de fração irredutível, é:

x_i	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

5.

5.1. As 12 horas do dia 15 de janeiro correspondem a 14 dias e meio após as zero horas do dia 1 de janeiro, ou seja, ao valor $t = 14{,}5$, pelo que o valor de cada PRC, em euros, arredondado com quatro casas decimais, era:

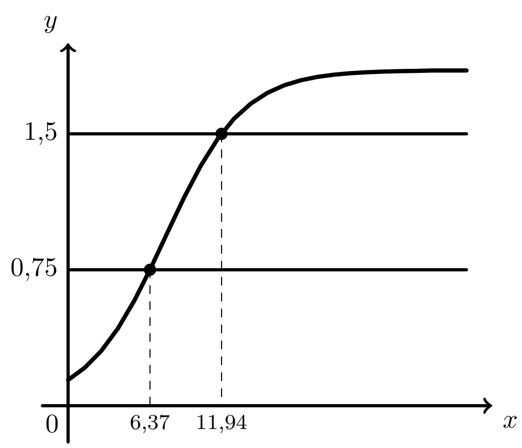
$$v(14{,}5) = \frac{1{,}85}{1 + 12e^{-0{,}33\times 14{,}5}} \approx 1{,}6814 \text{ €}$$

Como o Francisco pretende obter 1500 PRC, a quantia (q), em euros, que deve trocar, é:

$$\frac{1}{1500} = \frac{1{,}6814}{q} \Leftrightarrow q = 1{,}6814 \times 1500 \Leftrightarrow q \approx 2522 \text{ €}$$

5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação do valor de cada PRC em função do tempo ($y = \frac{1{,}85}{1 + 12e^{-0{,}33x}}$) e das retas correspondentes às taxas de câmbio de 0,75 euros e de 1,5 euros ($y = 0{,}75$ e $y = 1{,}5$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 31$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 2$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que a ta xa de câmbio era, respetivamente 0,75 € e 1,5 €, ou seja, os pontos de coordenadas $(6{,}37\,;\,0{,}75)$ e $(11{,}94\,;\,1{,}5)$



Assim, como o período de tempo em que a taxa de câmbio esteve entre os 0,75 € e os 1,15 € é de $11{,}94 - 6{,}37 = 5{,}57$ dias, os dois amigos não estiveram em Parcóvia, simultaneamente, durante dez dias consecutivos.

6.

6.1.

6.1.1. Determinando a frequência cardíaca do atleta vencedor em 2012, ou seja, o valor de P, sabendo que a média dos valores da tabela é 166,5, temos:

$$\frac{165+166+166+168+170+170+P+160+160+168}{10} = 166{,}5 \Leftrightarrow \frac{1493+P}{10} = 166{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1493+P = 166{,}5\times 10 \Leftrightarrow 1493+P = 1665 \Leftrightarrow P = 1665-1493 \Leftrightarrow P = 172$$

Desta forma podemos constatar que a primeira afirmação é falsa, porque o atleta vencedor em 2012 terminou a maratona com uma frequência cardíaca superior a 171 pulsações por minuto.

Considerando o valor de $P = 172$ e ordenando os dados da tabela podemos verificar que os valores centrais, são 166 e 168:

$$\underbrace{160\ 160\ 165\ 166\ 166}_{50\%}\ \underbrace{168\ 168\ 170\ 170\ 172}_{50\%}$$

Assim, temos que a mediana, $\tilde{x}$, das frequências cardíacas é: $\tilde{x} = \dfrac{166+168}{2} = 167$

Logo a segunda afirmação é falsa, porque a mediana não é 170.

Observando o diagrama de dispersão, podemos verificar que uma variação dos valores da temperatura ambiente estão corresponde a uma variação semelhante dos valores da frequência cardíaca dos atletas, ou seja, o aumento da temperatura está associado a um aumento da frequência cardíaca, o que representa uma correlação linear positiva, pelo que o respetivo coeficiente de correlação é positivo.

Assim, a terceira afirmação é falsa, porque o coeficiente de correlação linear não pode ser negativo.

6.1.2. De acordo com a reta ajustada ao diagrama de dispersão, a temperatura ambiente registada no final da maratona, no ano de 2006, é o valor de x correspondente ao valor de $y = 165$, ou seja a frequência cardíaca do atleta vencedor nesse ano.

Assim, substituindo o valor de y na equação da reta e determinando o valor corresponde de x, temos:

$$165 = 0{,}71x+147{,}1 \Leftrightarrow 165-147{,}1 = 0{,}71x \Leftrightarrow 17{,}9 = 0{,}71x \Leftrightarrow \frac{17{,}9}{0{,}71} = x$$

Como $\dfrac{17{,}9}{0{,}71} \approx 25{,}2$ podemos concluir que, de acordo com a reta ajustada do diagrama, 31,7 °C não é um valor admissível da temperatura ambiente registada no final da maratona, no ano de 2006, por ser bastante diferente do valor esperado (25,2 °C).

6.2. Como a dimensão da amostra recolhida pela Eduarda tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 300$
- A média amostral: $\overline{x} = 3$ horas, ou seja $3\times 60 = 180$ minutos
- O desvio padrão amostral: $s = 45$ minutos
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x}-z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\overline{x}+z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left]180-2{,}576\times\frac{45}{\sqrt{300}}\ ;\ 180+2{,}576\times\frac{45}{\sqrt{300}}\right[\approx]173{,}307;186{,}693[$$

Assim, como 3 horas e 15 minutos correspondem a $3\times 60+15 = 195$ minutos, podemos verificar que este valor não pertence ao intervalo de confiança para o valor médio do tempo de duração da maratona.

Assim podemos afirmar com 99% de confiança que o tempo médio da duração foi inferior a 3 horas e 15 minutos, ou seja, que a Eduarda tinha razão para duvidar da afirmação do bloguista.

7. Determinando o valor debitado na conta da Eduarda, temos:

   - O valor de 1200 PRC em euros: $1200 \times 0{,}8 = 960$ euros
   - O valor da taxa de 0,96%: $960 \times 0{,}0096 = 9{,}216$ euros

   Assim, como o valor debitado é a soma do valor em euros e das duas taxas aplicadas, o valor total, em euros, arredondado às centésimas, é:

$$960 + 9{,}216 + 3{,}52 \approx 972{,}74 \text{ euros}$$