REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

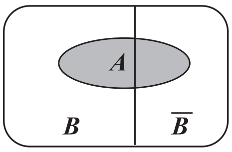
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

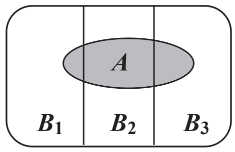
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A organização do ciclo de cinema CineJov pretende distribuir 250 programas pelos cinemas C1, C2, C3 e C4. A distribuição será feita tendo em conta o número de bilhetes vendidos em cada um destes cinemas, e utilizando o método seguinte.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de bilhetes vendidos pelo número de programas.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos cinemas, dividindo-se o número de bilhetes vendidos em cada cinema pelo divisor padrão.
- Se a quota padrão é um número inteiro, atribui-se ao cinema essa quota.
- Se a quota padrão não é um número inteiro, calcula-se $\sqrt{L(L+1)}$, sendo L o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Se a quota padrão é menor do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a cada cinema uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão é maior do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a cada cinema uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas padrão arredondadas seja igual ao número de programas a distribuir, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de programas para cada cinema é igual à quota padrão arredondada; caso a soma das quotas padrão arredondadas seja diferente do número de programas a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada cinema.
- Repetem-se os cinco pontos anteriores até se obter a soma das quotas padrão modificadas igual ao número de programas a distribuir.

Na Tabela 1, está registado o número de bilhetes vendidos em cada um dos cinemas. O número de bilhetes vendidos no cinema C4 está representado pela letra Z.

Tabela 1

	C1	C2	C3	C4
Número de bilhetes	938	849	683	Z

1.1. Supondo que o divisor padrão era 15, qual seria o número de bilhetes vendidos no cinema C4?

(A) 148

(B) 165

(C) 1280

(D) 3750

1.2. Considere agora que $Z = 530$.

Determine o número de programas a distribuir por cada cinema.

Apresente os valores das quotas padrão e os valores de $\sqrt{L(L+1)}$ arredondados às décimas.

2. A organização decidiu exibir os filmes A, B, C e D no dia de abertura do CineJov. Antecipadamente, colocou à votação do público a ordem pela qual os filmes iriam ser exibidos. A votação foi realizada no sítio dedicado à divulgação do ciclo de cinema, tendo cada votante de ordenar os quatro filmes, de acordo com a sua preferência. Nesta votação, foram apurados 750 votos válidos.

A Tabela 2 apresenta as preferências de 600 desses 750 votantes.

Tabela 2

N.º de votos / Preferência	225	180	195
1.ª	D	C	A
2.ª	C	B	D
3.ª	B	A	B
4.ª	A	D	C

Os 150 votantes cujas preferências não estão registadas na Tabela 2 votaram todos numa mesma ordenação dos quatro filmes, sendo essa ordenação diferente das três constantes da Tabela 2.

Concluída a votação, a organização aplicou o método a seguir descrito para definir a ordem de exibição dos quatro filmes.

- São atribuídos pontos a cada um dos filmes em função do seu lugar na ordem de preferência. Cada filme recebe:
    - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
    - três pontos por cada voto na segunda preferência;
    - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
    - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos filmes.
- Ordenam-se os filmes, por ordem decrescente de pontuação, e será essa a ordem de exibição, ou seja, é exibido em primeiro lugar o filme com maior pontuação.
- Em caso de empate, caberá à organização escolher a ordem de exibição dos filmes empatados.

Após a contabilização da pontuação total de cada um dos filmes, tendo em conta as preferências dos 750 votantes, verificou-se que as pontuações obtidas pelos filmes A e D eram iguais e que o filme B obteve a maior pontuação.

Identifique a ordenação dos filmes feita pelos 150 votantes cujas preferências não estão registadas na Tabela 2.

Na sua resposta, apresente a pontuação de cada filme, aplicando o método descrito:

– aos 600 votos registados na Tabela 2;

– ao total de 750 votos, tendo em conta a ordenação dos filmes que identificou.

3. Na Figura 1, está representada a planta do recinto de um dos cinemas onde decorre o CineJov.

O recinto é composto por cinco salas, numeradas de 1 a 5, e por uma Zona Exterior, num total de seis espaços. Todas as salas têm um único acesso à Zona Exterior e todas têm comunicação com, pelo menos, uma outra sala, como se observa na Figura 1.

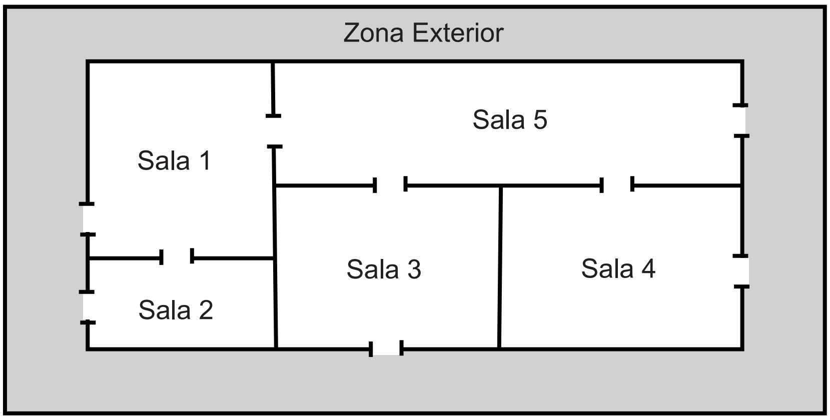


Figura 1

No final do dia, um funcionário faz uma inspeção completa ao recinto, respeitando as seguintes condições:

– passa por todas as portas;

– começa e termina na Sala 1.

Para realizar esta inspeção, o funcionário pode sair das diferentes áreas do recinto e nelas voltar a entrar as vezes que considerar necessárias. Com base na sua experiência, afirma que é impossível fazer a inspeção completa ao recinto, passando uma única vez por cada uma das portas.

Justifique que o funcionário tem razão e identifique a porta pela qual terá necessariamente de passar duas vezes.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

4. No decurso do CineJov, são realizados diversos estudos estatísticos. Num deles, concluiu-se que o número de espectadores presentes no sábado foi 72% do número de espectadores presentes no fim de semana.

4.1. Admita também que o número de espectadores presentes no domingo foi 70% do número de espectadores presentes no fim de semana.

Qual é a percentagem de espectadores que estiveram presentes tanto no sábado como no domingo?

(A) 58%

(B) 42%

(C) 34%

(D) 26%

4.2. Relativamente à totalidade dos espectadores presentes no fim de semana, sabe-se ainda que:

- dos presentes no sábado, 15% viram um filme em 3D;
- 21% não estiveram presentes no sábado nem viram um filme em 3D.

4.2.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos espectadores que estiveram presentes no fim de semana.

Qual é a probabilidade de esse espectador ter estado presente no sábado, sabendo-se que não viu um filme em 3D?

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

4.2.2. Admita que houve 4000 espectadores no CineJov durante o fim de semana.

Escolhem-se, ao acaso, dois desses espectadores.

Determine a probabilidade de ambos os espectadores não terem estado presentes no sábado e terem visto um filme em 3D.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

5. Na Tabela 3, estão registados, para cada um dos filmes, A, B, C, D, E, F e G, o custo de produção, em milhares de euros, e o número de espectadores, em milhares, que teve nas semanas de exibição em Portugal.

Tabela 3

Filme	Custo de produção (em milhares de euros) x	Número de espectadores (em milhares) y
A	435	99
B	379	84
C	65	16
D	60	13
E	276	75
F	59	12
G	43	9

5.1. O número de filmes cujo custo de produção é superior ao custo de produção médio é

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

5.2. Admita que a relação entre as variáveis x e y da Tabela 3 é, aproximadamente, linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação da forma $y = ax + b$.

Estime o custo de produção de um filme com 52,5 milhares de espectadores.

Apresente o resultado, em milhares de euros, arredondado às unidades.

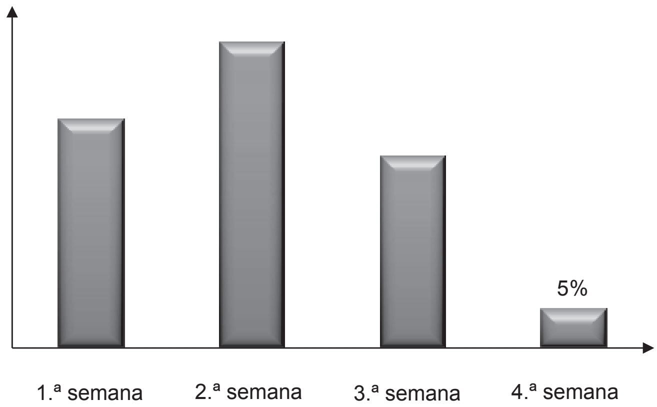
Na sua resposta, utilize os valores de a e de b com três casas decimais.

5.3. Admita que o número de espectadores do filme D, registado na Tabela 3, foi obtido nas quatro semanas em que o filme esteve em exibição.

O Gráfico 1, que não está completo, apresenta a distribuição da percentagem de espectadores do filme D nessas quatro semanas.

Gráfico 1

Percentagem de espectadores do filme D enquanto esteve em exibição



Admita que na terceira semana o número de espectadores foi 3250.

Determine o número total de espectadores do filme D nas duas primeiras semanas.

6. A organização do CineJov realizou, no decurso da edição do ano anterior, um inquérito aos espectadores, visando, entre outras coisas, estimar a proporção de pessoas dispostas a comprar um passe de ingresso para todos os dias do ciclo de cinema.

Foi inquirida uma amostra de 800 pessoas. Destas 800 pessoas, 250 mostraram-se recetivas à proposta apresentada.

Determine a amplitude de um intervalo de confiança a 90% para estimar a proporção de espectadores interessados em adquirir o passe de ingresso no CineJov.

Apresente a amplitude do intervalo de confiança em percentagem, arredondada às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

7. O CineJov decorre de segunda-feira a domingo. O preço dos bilhetes varia de acordo com o tipo de bilhete e com o dia da semana.

Na Tabela 4, apresentam-se os preços dos diferentes tipos de bilhete.

Tabela 4

Tipo de Bilhete		**Preço**
Diário	De 2.ª a 6.ª feira	12 €
	Sábado ou Domingo	16 €
Passe	Válido só para o fim de semana	24 €
	Válido para todos os dias	74 €

Dois amigos pretendem ir ao CineJov. Um deles pretende comprar bilhetes para 4 dias úteis e o passe para o fim de semana, o outro pretende comprar bilhetes para os 5 dias úteis e para o sábado.

Averigue, para cada um dos dois amigos, se a compra do passe válido para todos os dias do CineJov é vantajosa.

8. O Rui, um frequentador habitual do CineJov, partilhou numa rede social, às oito horas de um certo dia, a lista de filmes que serão exibidos durante o ciclo de cinema. A partir desse momento, alguns dos seus amigos efetuaram novas partilhas dessa lista.

Admita que o número total de novas partilhas da lista de filmes, ao fim de t horas após o instante em que o Rui partilhou a lista de filmes, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = 12e^{0,38t} - 2, \text{ com } t \in \left]0, 12\right]$$

Por exemplo, ao fim de duas horas após o instante em que o Rui partilhou a lista de filmes, tinham sido realizadas um total de 24 novas partilhas, uma vez que $P(2) \approx 23,66$

8.1. Determine o número total de novas partilhas realizadas entre as treze e as catorze horas (inclusive).

8.2. Que horas eram quando o número total de novas partilhas foi pela primeira vez superior a 500?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas;
- o resultado, em horas, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)														TOTAL
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.1.**	**4.2.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	
5	20	20	15	5	15	20	5	15	15	15	15	20	15	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

Época Especial