

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2017, 1.ª fase)  
Proposta de resolução



1.

1.1. Calculando o divisor padrão, temos:

$$\text{Divisor padrão} = \frac{1170}{26} = 45$$

Pelo que a quota padrão da zona temática SD, com aproximação às centésimas, é:

$$\text{Quota padrão} = \frac{286}{45} \approx 6,36$$

Resposta: **Opção A**

1.2. Aplicando o método descrito para a distribuição de 27 vales de refeição pelas três zonas temáticas, temos:

Zona Temática	AQ	MT	SD
Média do número de visitantes, por hora	554	330	286
Divisor padrão	$\frac{1170}{27} \approx 43,33$		
Quota padrão	$\frac{554}{43,33} \approx 12,79$	$\frac{330}{43,33} \approx 7,62$	$\frac{286}{43,33} \approx 6,60$
1.ª atribuição	12	7	6
Total provisório	$12 + 7 + 6 = 25$		
2.ª atribuição	1	1	0
Vales atribuídos	$12 + 1 = 13$	$7 + 1 = 8$	$6 + 0 = 6$

Assim, temos que a distribuição dos 27 vales pelas 3 zonas temáticas, é:

- Zona AQ: 13 vales (eram 12 com um total de 26 vales)
- Zona MQ: 8 vales (eram 7 com um total de 26 vales)
- Zona SD: 6 vales (eram 7 com um total de 26 vales)

Assim, podemos verificar que apesar do aumento do número de vales a distribuir (de 26 para 27), existe uma zona (a zona SD) que fica com menos um vale na nova distribuição, o que pode ser considerado uma situação paradoxal.

2. Aplicando o método descrito para determinar qual foi a ementa vencedora, começando por selecionar as ementas A e B, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Ementas A e B	Ementa A 309	Ementa B $602 + 727 = 1329$	Ementa B
Ementas B e C	Ementa B $309 + 727 = 1036$	Ementa C 602	Ementa B
Ementas B e D	Ementa B $602 + 309 = 911$	Ementa D 726	Ementa B

Como a ementa B venceu em todas as comparações com as restantes é a ementa vencedora.

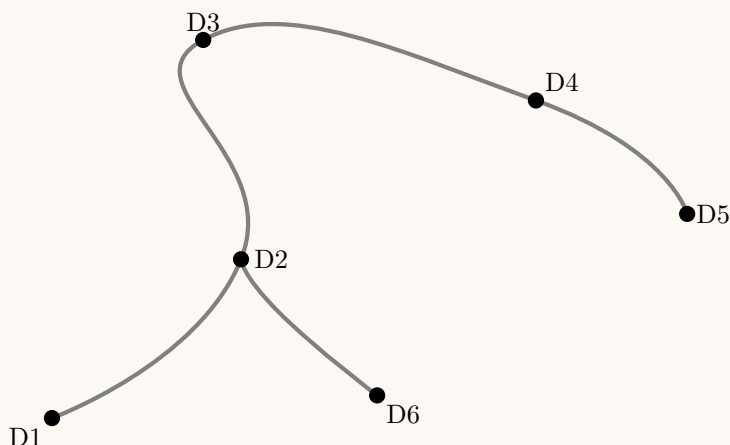
3. De acordo com o grafo apresentado e com a aplicação do algoritmo, selecionando inicialmente a diversão D1, obtemos a seguinte seleção das arestas e o grafo da figura seguinte:

- I- Diversão D1
- II- Aresta D1-D2 - ponderação 360
- III- Aresta D2-D3 - ponderação 302
- IV- Aresta D2-D6 - ponderação 308
- V- Aresta D3-D4 - ponderação 480
- VI- Aresta D4-D5 - ponderação 286

(a seleção de outra diversão na fase inicial do algoritmo não altera a árvore abrangente mínima obtida).

Assim, a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar, corresponde à soma das ponderações das arestas selecionadas, ou seja:

$$360 + 302 + 308 + 480 + 286 = 1736 \text{ m}$$



4. Calculando o valor dos bilhetes que o Manuel pretende comprar, de acordo com cada uma das promoções, temos:

- Promoção 1:
  - Custos dos bilhetes para adultos (2 adultos integrados no bilhete familiar e um de acordo com o precário, porque o bilhete familiar é aplicável apenas a dois adultos):  $25 \times 2 + 27 = 77$  euros
  - Custos dos bilhetes para crianças (3 crianças integradas no bilhete familiar):  $16 \times 3 = 48$  euros
  - Custo total:  $77 + 48 = 125$  euros
- Promoção 2:
  - Custos dos bilhetes para adultos (sem desconto):  $27 \times 3 = 81$  euros
  - Custos dos bilhetes para crianças (sem desconto):  $19 \times 3 = 57$  euros
  - Custo total (sem desconto):  $81 + 57 = 138$  euros
  - Custo final (com desconto):  $138 - 138 \times 0,15 = 117,3$  euros

Assim, podemos verificar que a promoção 2 permite obter um valor mais baixo para a compra dos bilhetes, pelo que é a opção mais vantajosa.



5.

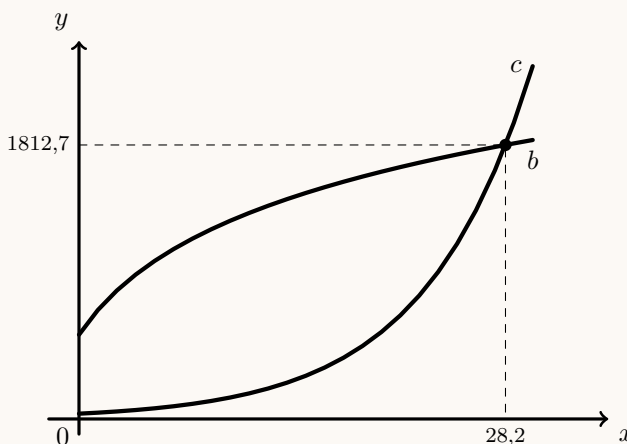
- 5.1. Como 2 dias após a abertura da bilheteira *online*, corresponde às zero horas do dia 12 de julho de 2000, temos que o número de bilhetes vendidos antes do dia 12 de junho é o valor de  $b(2)$  e o número de bilhetes vendidos até ao final do dia 12 de junho, ou seja até às zero horas do dia 13 de julho é o valor de  $b(3)$ , ambos arredondados às unidades.

Assim, o número de bilhetes vendidos no dia 12 de junho é o valor de  $b(3) - b(2)$  arredondado às unidades, ou seja:

$$b(3) - b(2) = 140 + 602 \ln(0,5 \times 3 + 2) - (140 + 602 \ln(0,5 \times 2 + 2)) \approx 93$$

- 5.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação do número de bilhetes vendidos nas duas bilheteiras *online* em função do tempo ( $y = 140 + 602 \ln(0,5x + 2)$  e  $y = 35e^{0,14x}$ ), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja,  $0 \leq x \leq 30$  e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja,  $0 \leq y < 2500$ , obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às décimas) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que o número de bilhetes vendidos nas duas bilheteiras era igual, ou seja, o ponto de coordenadas  $(28,2; 1812,7)$



Assim, pela observação dos gráficos podemos concluir que, até aos 28,2 dias o número de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi superior ao número de bilhetes vendidos pela bilheteira da empresa *ComPromo*, ou seja, foi ao fim de 29 dias após a abertura das duas bilheteiras que o número total de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi, pela primeira vez, inferior ao número total de bilhetes vendidos na bilheteira disponibilizada pela *ComPromo*.

6.

- 6.1. Ordenando os valores da tabela, temos:

$$\underbrace{184 < 200 < 208 < 224 < 232 < 240 < 256}_{50\%} < \underbrace{264 < 280 < 280 < 288 < 312 < 328 < 344}_{50\%}$$

Pelo que podemos verificar que o valor da mediana é a média entre os valores 256 e 264, ou seja entre os números de utilizadores da diversão na quarta-feira da segunda semana e na quinta-feira da segunda semana.

Resposta: **Opção C**



6.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores da tabela:

184 200 208 224 232 240 256 264 280 280 288 312 328 344

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos o valor para a média diária do número de utilizadores desta diversão, nas duas primeiras semanas de 2015:

$$\bar{x} = 260$$

Como no ano seguinte a média, para o mesmo o período foi de 292,5, o valor médio acrescido é de  $292,5 - 260 = 32,5$  visitantes.

Assim, o valor percentual correspondente ao aumento médio é:

$$\frac{260}{32,5} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 32,5}{260} \Leftrightarrow p = 12,5$$

6.3. Calculando a proporção dos utilizadores do número de utilizadores da diversão aos sábados e domingos, nas duas primeiras semanas de agosto, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\hat{p} = \frac{328 + 312 + 344 + 288}{184 + 224 + 232 + 240 + 280 + 328 + 312 + 208 + 200 + 256 + 264 + 280 + 344 + 288} = \frac{1272}{3640} \approx 0,35$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção  $\left( \left[ \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \right)$ , temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left( \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ( $\hat{p}$ ) e de  $n$  ( $n = 3640$ ), e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{3640}} = 0,0407301 \Leftrightarrow z \times 0,0079057 \approx \frac{0,0407301}{2} \Leftrightarrow z \approx \frac{0,0407301}{2 \times 0,0079057} \Leftrightarrow z \approx 2,576$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor  $z \approx 2,576$ , ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%

6.4. Como no gráfico podemos observar a variação do número de utilizadores dessa diversão em cada dia da terceira semana do mês de agosto de 2015, relativamente ao dia imediatamente anterior, e no último dia (domingo) da segunda semana a diversão foi utilizada por 288 pessoas (de acordo com os dados da tabela), temos que o número de utilizadores na terceira semana foi:

- segunda-feira:  $288 - 45 = 243$
- terça-feira:  $243 + 10 = 253$
- quarta-feira:  $253 + k$

Por outro lado, como se sabe que na terceira semana do mês de agosto um total de 734 pessoas utilizou a diversão até quarta-feira (inclusive), temos que:

$$243 + 253 + 253 + k = 734 \Leftrightarrow 749 + k = 734 \Leftrightarrow k = 734 - 749 \Leftrightarrow k = -15$$



7.

7.1.

7.1.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:

$H$ : «A pessoa escolhida ser homem»

$A$ : «A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Anaconda»

Temos, de acordo com o enunciado, que:  $P(\overline{H}|A) = 30\% = 0,3$  e que  $P(A) = 40\% = 0,4$

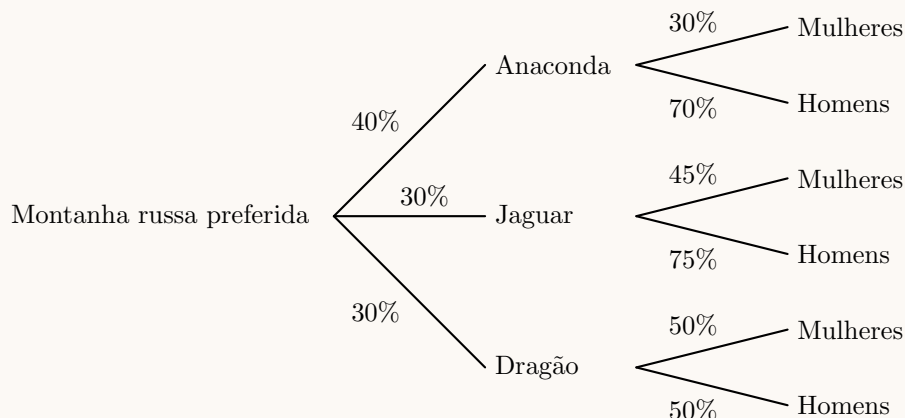
Como  $P(H|A) = 1 - P(\overline{H}|A) = 1 - 0,3 = 0,7$ , a probabilidade da pessoa escolhida ser homem e preferir a montanha-russa Anaconda, é:

$$P(H \cap A) = P(H|A) \times P(A) = 0,7 \times 0,4 = 0,28 = 28\%$$

Resposta: **Opção B**

7.1.2. Como cada uma das pessoas indicou a sua preferência por uma e só uma das montanhas-russas, temos que a percentagem que preferiram o Dragão é  $100 - 40 - 30 = 30\%$

Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Desta forma, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:

$M$ : «A pessoa escolhida ser mulher»

$A$ : «A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Anaconda»

$D$ : «A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Dragão»

$J$ : «A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Jaguar»

Temos que a probabilidade de a pessoa escolhida preferir a montanha-russa Jaguar, sabendo-se que é mulher, na forma de fração irredutível, é:

$$\begin{aligned} P(J|M) &= \frac{P(J \cap M)}{P(M)} = \frac{P(J \cap M)}{P(J \cap M) + P(A \cap M) + P(D \cap M)} = \\ &= \frac{0,3 \times 0,45}{0,3 \times 0,45 + 0,4 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5} = \frac{0,135}{0,405} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



7.2. A probabilidade da Beatriz escolher a montanha-russa Jaguar é  $80\% = 0,8$  e a probabilidade de fazer uma escolha diferente é  $1 - 0,8 = 0,2$ .

Assim, como se pretende calcular a probabilidade da Beatriz ter escolhido a montanha-russa Jaguar, no máximo, uma vez, em três escolhas, temos a probabilidade pretendida é a soma das probabilidades de 4 acontecimentos:

- **Não ter escolhido** a montanha-russa Jaguar em nenhuma das três escolhas
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na primeira** escolha
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na segunda** escolha
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na terceira** escolha

Assim o valor da probabilidade é:

$$\overbrace{0,2 \times 0,2 \times 0,2}^{\text{Nunca escolheu}} + \overbrace{0,8 \times 0,2 \times 0,2}^{\text{Apenas na 1.ª}} + \overbrace{0,2 \times 0,8 \times 0,2}^{\text{Apenas na 2.ª}} + \overbrace{0,2 \times 0,2 \times 0,8}^{\text{Apenas na 3.ª}} = 0,104$$

Desta forma o valor da probabilidade, em percentagem, é  $10,4\%$

