Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
2017 - 1.ª Fase

Proposta de resolução

1.

1.1. Calculando o divisor padrão, temos:

$$\text{Divisor padrão} = \frac{1170}{26} = 45$$

Pelo que a quota padrão da zona temática SD, com aproximação às centésimas, é:

$$\text{Quota padrão} = \frac{286}{45} \approx 6{,}36$$

Resposta: **Opção A**

1.2. Aplicando o método descrito para a distribuição de 27 vales de refeição pelas três zonas temáticas, temos:

Zona Temática	**AQ**	**MT**	**SD**
Média do número de visitantes, por hora	554	330	286
Divisor padrão	$\frac{1170}{27} \approx 43{,}33$		
Quota padrão	$\frac{554}{43{,}33} \approx 12{,}79$	$\frac{330}{43{,}33} \approx 7{,}62$	$\frac{286}{43{,}33} \approx 6{,}60$
1.ª atribuição	12	7	6
Total provisório	$12 + 7 + 6 = 25$		
2.ª atribuição	1	1	0
Vales atribuídos	$12 + 1 = 13$	$7 + 1 = 8$	$6 + 0 = 6$

Assim, temos que a distribuição dos 27 vales pelas 3 zonas temáticas, é:

- Zona AQ: 13 vales (eram 12 com um total de 26 vales)
- Zona MQ: 8 vales (eram 7 com um total de 26 vales)
- Zona SD: 6 vales (eram 7 com um total de 26 vales)

Assim, podemos verificar que apesar do aumento do número de vales a distribuir (de 26 para 27), existe uma zona (a zona SD) que fica com menos um vale na nova distribuição, o que pode ser considerado uma situação paradoxal.

2. Aplicando o método descrito para determinar qual foi a ementa vencedora, começando por selecionar as ementas A e B, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Ementas A e B	Ementa A 309	Ementa B $602 + 727 = 1329$	Ementa B
Ementas B e C	Ementa B $309 + 727 = 1036$	Ementa C 602	Ementa B
Ementas B e D	Ementa B $602 + 309 = 911$	Ementa D 726	Ementa B

Como a ementa B venceu em todas as comparações com as restantes é a ementa vencedora.

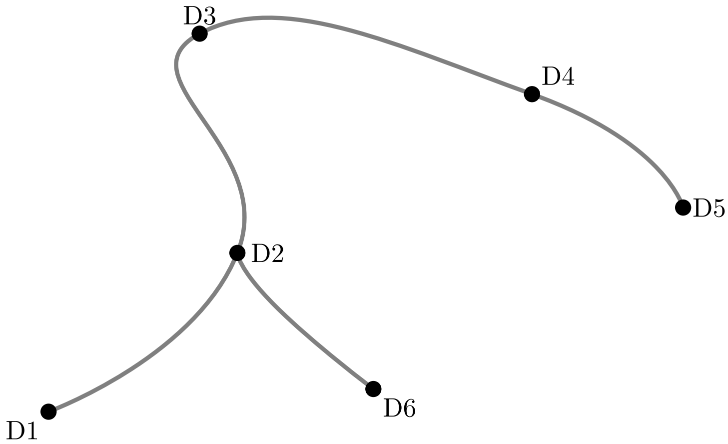
3. De acordo com o grafo apresentado e com a aplicação do algoritmo, selecionando inicialmente a diversão D1, obtemos a seguinte seleção das arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Diversão D1
II- Aresta D1-D2 - ponderação 360
III- Aresta D2-D3 - ponderação 302
IV- Aresta D2-D6 - ponderação 308
V- Aresta D3-D4 - ponderação 480
VI- Aresta D4-D5 - ponderação 286

(a seleção de outra diversão na fase inicial do algoritmo não altera a árvore abrangente mínima obtida).

Assim, a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar, corresponde à soma das ponderações das arestas selecionadas, ou seja:

$360 + 302 + 308 + 480 + 286 = 1736$ m



4. Calculando o valor dos bilhetes que o Manuel pretende comprar, de acordo com cada uma das promoções, temos:

- Promoção 1:
  - Custos dos bilhetes para adultos (2 adultos integrados no bilhete familiar e um de acordo com o precário, porque o bilhete familiar é aplicável apenas a dois adultos): $25 \times 2 + 27 = 77$ euros
  - Custos dos bilhetes para crianças (3 crianças integradas no bilhete familiar): $16 \times 3 = 48$ euros
  - Custo total: $77 + 48 = 125$ euros
- Promoção 2:
  - Custos dos bilhetes para adultos (sem desconto): $27 \times 3 = 81$ euros
  - Custos dos bilhetes para crianças (sem desconto): $19 \times 3 = 57$ euros
  - Custo total (sem desconto): $81 + 57 = 138$ euros
  - Custo final (com desconto): $138 - 138 \times 0{,}15 = 117{,}3$ euros

Assim, podemos verificar que a promoção 2 permite obter um valor mais baixo para a compra dos bilhetes, pelo que é a opção mais vantajosa.

5.

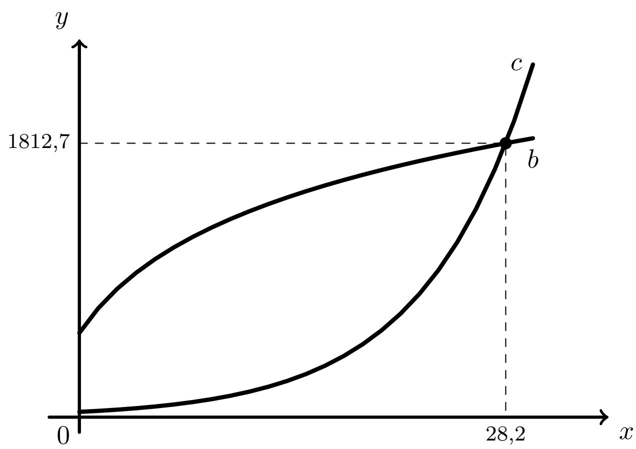
5.1. Como 2 dias após a abertura da bilheteira *online*, corresponde às zero horas do dia 12 de julho de 2000, temos que o número de bilhetes vendidos antes do dia 12 de junho é o valor de $b(2)$ e o número de bilhetes vendidos até ao final do dia 12 de junho, ou seja até às zero horas do dia 13 de julho é o valor de $b(3)$, ambos arredondados às unidades.

Assim, o número de bilhetes vendidos no dia 12 de junho é o valor de $b(3) - b(2)$ arredondado às unidades, ou seja:

$$b(3) - b(2) = 140 + 602\ln(0{,}5 \times 3 + 2) - \big(140 + 602\ln(0{,}5 \times 2 + 2)\big) \approx 93$$

5.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação do número de bilhetes vendidos nas duas bilheteiras *online* em função do tempo ($y = 140 + 602\ln(0{,}5x + 2)$ e $y = 35e^{0{,}14x}$), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja, $0 \leq x \leq 30$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 2500$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às décimas) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao tempo em que o número de bilhetes vendidos nas duas bilheteiras era igual, ou seja, o ponto de coordenadas $(28{,}2\,;\,1812{,}7)$



Assim, pela observação dos gráficos podemos concluir que, até aos 28,2 dias o número de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi superior ao número de bilhetes vendidos pela bilheteira da empresa *ComPromo*, ou seja, foi ao fim de 29 dias após a abertura das duas bilheteiras que o número total de bilhetes vendidos na bilheteira *online* do parque foi, pela primeira vez, inferior ao número total de bilhetes vendidos na bilheteira disponibilizada pela *ComPromo*.

6.

6.1. Ordenando os valores da tabela, temos:

$$\underbrace{184 < 200 < 208 < 224 < 232 < 240 < 256}_{50\%} < \underbrace{264 < 280 < 280 < 288 < 312 < 328 < 344}_{50\%}$$

Pelo que podemos verificar que o valor da medidana é a média entre os valores 256 e 264, ou seja entre os números de utilizadores da diversão na quarta-feira da segunda semana e na quinta-feira da segunda semana.

Resposta: **Opção C**

6.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores da tabela:

$$184 \quad 200 \quad 208 \quad 224 \quad 232 \quad 240 \quad 256 \quad 264 \quad 280 \quad 280 \quad 288 \quad 312 \quad 328 \quad 344$$

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos o valor para a média diária do número de utilizadores desta diversão, nas duas primeiras semanas de 2015:

$$\overline{x} = 260$$

Como no ano seguinte a média, para o mesmo o período foi de 292,5, o valor médio acrescido é de $292{,}5 - 260 = 32{,}5$ visitantes.

Assim, o valor percentual correspondente ao aumento médio é:

$$\frac{260}{32{,}5} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 32{,}5}{260} \Leftrightarrow p = 12{,}5$$

6.3. Calculando a proporção dos utilizadores do número de utilizadores da diversão aos sábados e domingos, nas duas primeiras semanas de agosto, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\hat{p} = \frac{328 + 312 + 344 + 288}{184 + 224 + 232 + 240 + 280 + 328 + 312 + 208 + 200 + 256 + 264 + 280 + 344 + 288} = \frac{1272}{3640} \approx 0{,}35$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n ($n = 3640$), e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{3640}} = 0{,}0407301 \Leftrightarrow z \times 0{,}0079057 \approx \frac{0{,}0407301}{2} \Leftrightarrow z \approx \frac{0{,}0407301}{2 \times 0{,}0079057} \Leftrightarrow z \approx 2{,}576$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 2{,}576$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%

6.4. Como no gráfico podemos observar a variação do número de utilizadores dessa diversão em cada dia da terceira semana do mês de agosto de 2015, relativamente ao dia imediatamente anterior, e no último dia (domingo) da segunda semana a diversão foi utilizada por 288 pessoas (de acordo com os dados da tabela), temos que o número de utilizadores na terceira semana foi:

- segunda-feira: $288 - 45 = 243$
- terça-feira: $243 + 10 = 253$
- quarta-feira: $253 + k$

Por outro lado, como se sabe que na terceira semana do mês de agosto um total de 734 pessoas utilizou a diversão até quarta-feira (inclusive), temos que:

$$243 + 253 + 253 + k = 734 \Leftrightarrow 749 + k = 734 \Leftrightarrow k = 734 - 749 \Leftrightarrow k = -15$$

7.

7.1.

7.1.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:
H: ≪A pessoa escolhida ser homem≫
A: ≪A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Anaconda≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(\overline{H}|A\right) = 30\% = 0{,}3$ e que $P\left(A\right) = 40\% = 0{,}4$

Como $P\left(H|A\right) = 1 - P\left(\overline{H}|A\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, a probabilidade da pessoa escolhida ser homem e preferir a montanha-russa Anaconda, é:

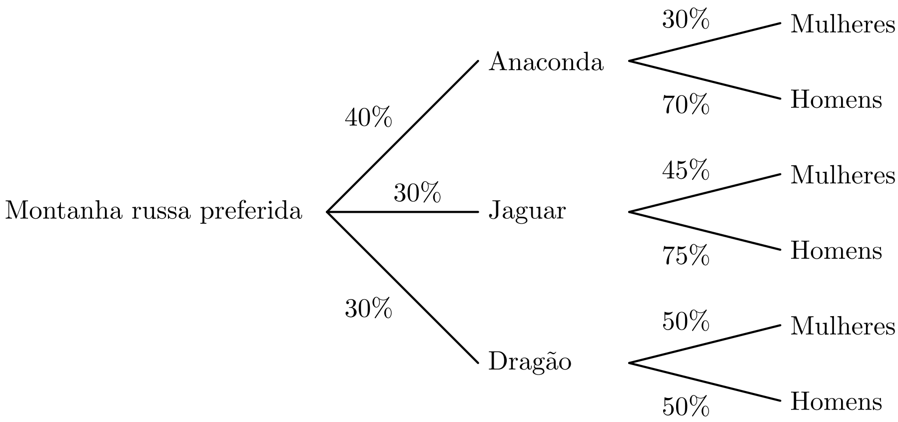
$$P(H \cap A) = P\left(H|A\right) \times P\left(A\right) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28 = 28\%$$

Resposta: **Opção B**

7.1.2.

7.1.3. Como cada uma das pessoas indicou a sua preferência por uma e só uma das montanhas-russas, temos que a percentagem que preferiram o Dragão é $100 - 40 - 30 = 30\%$

Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Desta forma, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:
M: ≪A pessoa escolhida ser mulher≫
A: ≪A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Anaconda≫
D: ≪A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Dragão≫
J: ≪A pessoa escolhida preferir a montanha-russa Jaguar≫

Temos que a probabilidade de a pessoa escolhida preferir a montanha-russa Jaguar, sabendo-se que é mulher, na forma de fração irredutível, é:

$$P(J|M) = \frac{P(J \cap M)}{P(M)} = \frac{P(J \cap M)}{P(J \cap M) + P(A \cap M) + P(D \cap M)} =$$
$$= \frac{0{,}3 \times 0{,}45}{0{,}3 \times 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}5} = \frac{0{,}135}{0{,}405} = \frac{1}{3}$$

7.2. A probabilidade da Beatriz escolher a montanha-russa Jaguar é $80\% = 0{,}8$ e a probabilidade de fazer uma escolha diferente é $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Assim, como se pretende calcular a probabilidade da Beatriz ter escolhido a montanha-russa Jaguar, no máximo, uma vez, em três escolhas, temos a probabilidade pretendida é a soma das probabilidades de 4 acontecimentos:

- **Não ter escolhido** a montanha-russa Jaguar em nenhuma das três escolhas
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na primeira** escolha
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na segunda** escolha
- Ter escolhido a montanha-russa Jaguar **apenas na terceira** escolha

Assim o valor da probabilidade é:

$$\overbrace{0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2}^{\text{Nunca escolheu}} + \overbrace{0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2}^{\text{Apenas na 1.}^{\text{a}}} + \overbrace{0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}2}^{\text{Apenas na 2.}^{\text{a}}} + \overbrace{0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8}^{\text{Apenas na 3.}^{\text{a}}} = 0{,}104$$

Desta forma o valor da probabilidade, em percentagem, é 10,4%