Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2017, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1.

1.1. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos é: $373 + 602 + 318 + 157 = 1450$
- O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é: $\dfrac{1450}{2} + 1 = 726$

Assim podemos verificar que a lista X, em coligação com qualquer outra lista obteria a maioria absoluta. Desta forma a coligação X com Z obteria uma votação de $602 + 157 = 759$, e portanto mais do que os 726 votos necessários para a maioria absoluta.

Resposta: **Opção B**

1.2. Aplicando o método de Hondt, temos:

Lista	V	X	Y	Z
Número de votos	373	602	318	157
Divisão por 1	373	602	318	157
Divisão por 2	$\frac{373}{2} \approx 187$	$\frac{602}{2} = 301$	$\frac{318}{2} = 159$	$\frac{157}{2} \approx 79$
Divisão por 3	$\frac{373}{3} \approx 124$	$\frac{602}{3} \approx 201$	$\frac{318}{3} = 106$	
Divisão por 4	$\frac{373}{4} \approx 93$	$\frac{602}{4} \approx 151$		
Divisão por 5		$\frac{602}{5} \approx 120$		

Assim, temos que o número de elementos de cada lista na equipa constituída, é:

- Lista V: 3 elementos
- Lista X: 4 elementos
- Lista Y: 2 elementos
- Lista Z: 1 elementos

Pelo que o aluno não tem razão porque a Lista V tem mais um elemento que a Lista Y.

2. Fazendo a distribuição do prémio pelo três projetos, segundo o algoritmo apresentado, temos:

Projetos / **Bens**	**J**	**C**	**T**
Computador	350	400	304
Impressora	400	380	168
Máquina Fotográfica	201	252	302
Valor global	951	1032	774
Valor considerado justo	317	344	258
Atribuição de bens	Impressora	Computador	Máq. Fotográfica
Valor monetário recebido	400	400	302
Excedente pago	83	56	44
Dinheiro sobrante	$83 + 56 + 44 = 183$		
Divisão final	61	61	61

Assim, a distribuição final do prémio pelos três projetos é:

- O Jornal da Escola recebe a Impressora e paga $83 - 61 = 22$ euros
- O Clube da Ciência recebe o Computador e ainda $61 - 56 = 5$ euros
- o Clube de Teatro recebe a Máquina Fotográfica e ainda $61 - 44 = 17$ euros

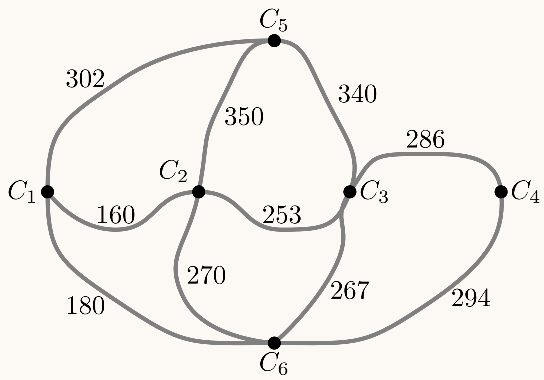
3. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado.

Iniciando o pedipaper se no posto de controlo C_5 e aplicando o algoritmo, temos a seguinte sequência de visita aos postos de controlo:

$$C_5 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_6 \rightarrow C_4$$

E assim, o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes, é:

$$302 + 160 + 253 + 267 + 294 = 1276 \text{ m}$$



4. Determinando, em euros, o valor da primeira prestação e o valor da segunda prestação, podemos verificar que, como a taxa de juro a 360 dias é de 10%, então a taxa de juro a $\frac{360}{4} = 90$ dias é de $\frac{10}{4} = 2{,}5\%$

   Assim, temos que:

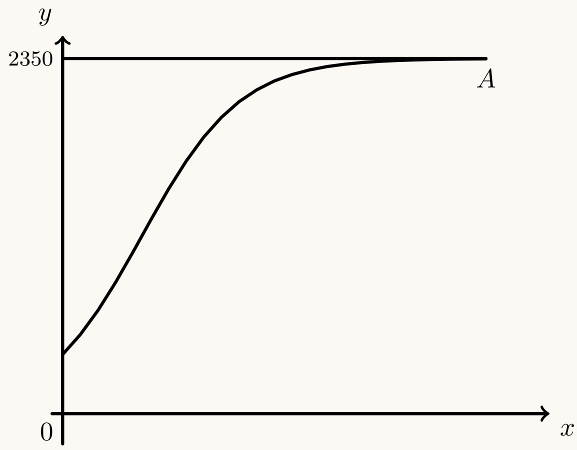
   - C – custo da viagem: 600 euros
   - n – 1 (1ª prestação) e 2 (2ª prestação)
   - j – taxa de juro a 90 dias: 2,5%, ou seja, 0,025

   E desta forma, os valores das duas primeiras prestações é:

   - 1ª prestação: $P_1 = 600 \times [0{,}25 + 0{,}025 \times (1{,}25 - 0{,}25 \times 1)] = 165$ euros
   - 2ª prestação: $P_2 = 600 \times [0{,}25 + 0{,}025 \times (1{,}25 - 0{,}25 \times 2)] = 161{,}25$ euros

5.

5.1. Representando na calculadora gráfica o modelo da variação do número de alunos inscritos em função do tempo ($y = \frac{2350}{1+5e^{-0{,}43x}}$), e a reta horizontal definida pela equação $y = 2350$, numa janela compatível com um limite temporal alargado, $0 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 2500$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Assim podemos concluir que o número de alunos inscritos, de acordo com o modelo apresentado, irá aproximar-se de 2350, que corresponde, no modelo logístico, ao parâmetro que determina o limite superior da variação.

5.2. Usando o modelo inserido na calculadora gráfica no item anterior, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar que o número de alunos matriculados em 2002:

$$A(2) \approx 754$$

Assim, pretendemos determinar o ano em que o número de alunos matriculados seja $754 + 950 = 1704$

Recorrendo novamente à tabela de valores da função, podemos verificar que o valor anterior corresponde ao número de alunos inscritos para $t = 6$, ou seja, $A(6) \approx 1704$, pelo que 6 anos após a inauguração, ou seja, em 2006 havia mais 950 alunos matriculados do que em 2002, logo podemos concluir que o jornal passou a ter instalações próprias em 2006.

X	Y1
0	391,667
1	552,610
2	754,218
3	988,910
4	1239,889
5	1485,066
6	1704,294

6.

6.1. De acordo com a tabela, e considerando a variável aleatória X:«tempo gasto por cada aluno no percurso de casa à escola», temos que:

$$P(X < 30) = 65\%$$

Como a variável aleatória é bem modela por uma distribuição normal, podemos assumir que $P(X < \mu) \approx 50\%$, pelo que $\mu < 30$ (o que não é compatível com as opções (C) e (D)).

Da mesma forma, podemos assumir que $P(X < \mu + \sigma) \approx 50 + \frac{68}{2} \approx 84\%$, pelo que $\mu + \sigma > 30$. Assim, temos que $\mu < 30 < \mu + \sigma$, e, de entre as opções apresentadas, a única compatível com esta conclusão é a opção (B).

Resposta: **Opção B**

6.2. Relacionando as frequências absoluta simples e relativa simples da classe ([10,20[) podemos calcular o número total de alunos:

$$12 = \frac{144}{\text{total}} \times 100 \Leftrightarrow \text{total} = \frac{144}{12} \times 100 \Leftrightarrow \text{total} = 1200$$

Assim podemos calcular a frequência relativa simples da classe [20,30[, e a frequêncai relativa simples da classe [30,40[, por se tratar da última classe, como está indicado na tabela:

Tempo (em minutos)	**Número de alunos**	**Frequência relativa simples %**	**Frequência relativa acumulada %**
[0,10[		a	
[10,20[	144	12	
[20,30[	336	$\frac{336}{1200} \times 100 = 28$	65
[30,40[		$100 - 65 = 35$	100

Assim, observando que a soma de todas as frequências relativas simples é igual a 100%, podemos determinar o valor de a:

$$a = 100 - 35 - 28 - 12 = 25$$

7. ´

7.1. Consultando os dados do gráfico, podemos observar que o número de raparigas que foram ao cinema, pelo menos, três vezes no ano, ou seja, três ou quatro ou cinco vezes é:

$$106 + 60 + 43 = 209$$

Como no total foram inquiridas 350 raparigas, a percentagem, arredondada às décimas, corresponde ao valor 209 é:

$$\frac{209}{350} \times 100 \approx 59{,}7$$

Resposta: **Opção C**

7.2. A probabilidade de serem escolhidos dois alunos, ambos do mesmo sexo, é a soma das probabilidade de serem ambos rapazes com a probabilidade de serem ambos raparigas.

Desta forma, como foram escolhidos dois alunos de entre os que foram ao cinema uma vez no ano, ou seja de entre um conjunto de $46 + 17 = 63$ alunos (46 raparigas e 17 rapazes), a probabilidade é:

$$\overbrace{\frac{46}{63} \times \frac{45}{62}}^{\substack{\text{1.º e 2.º alunos} \\ \text{serem raparigas}}} + \overbrace{\frac{17}{63} \times \frac{16}{62}}^{\substack{\text{1.º e 2.º alunos} \\ \text{serem rapazes}}} \approx 0{,}5996$$

Assim, a probabilidade de serem ambos do mesmo sexo, em percentagem, arredondado às unidades é 60%

7.3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de idas aos cinemas, e noutra lista o número de jovens correspondentes, ou seja, para cada valor a soma dos rapazes e das raparigas:

N.º de idas ao cinema	N.º de jovens
0	$32 + 10 = 42$
1	$46 + 17 = 63$
2	$63 + 42 = 105$
3	$106 + 34 = 140$
4	$60 + 25 = 85$
5	$43 + 22 = 65$

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média de idas ao cinema e o desvio padrão para a amostra dos 500 alunos:

$$\overline{x} \approx 2{,}72 \text{ e } s \approx 1{,}44$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A média amostral: $\overline{x} \approx 2{,}72$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 1{,}44$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left]2{,}72 - 1{,}960 \times \frac{1{,}44}{\sqrt{500}} \,;\, 2{,}72 + 1{,}960 \times \frac{1{,}44}{\sqrt{500}}\right[\approx \left]2{,}6; 2{,}8\right[$$

8.

8.1. Como X é número de vezes em que a roleta para num sector colorido a cinzento, e a roleta é rodada por duas vezes, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 0$, se nunca sair um setor colorido a cinzento, ou seja, sair um setor colorido a branco nas duas vezes em que a roleta é colocada a rolar:

$$P(X = 0) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

- $X = 1$, se sair um setor colorido a cinzento numa das vezes em que a roleta é colocada a rolar, ou seja, apenas na primeira vez, ou, apenas na segunda vez:

$$P(X = 1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

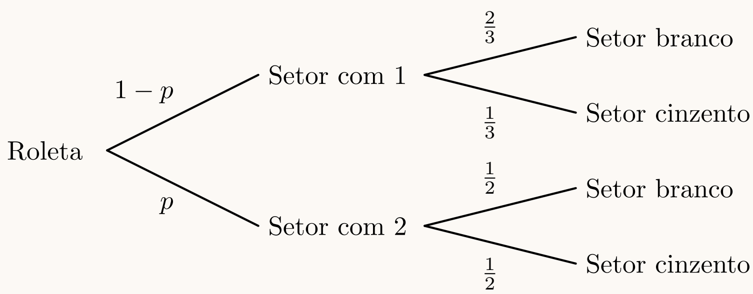
- $X = 2$, se sair um setor colorido a cinzento nas duas vezes em que a roleta é colocada a rolar:

$$P(X = 0) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X, com os valores na forma de fração irredutível, é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{64}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{64}$

8.2. Designando por p a probabilidade de se obter um sector numerado com o algarismo 2, e esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta e observar o setor assinalado pela seta, e os acontecimentos:
B:≪O setor estar colorido a branco≫
D:≪O setor estar numerado com o algarismo 2≫

Como $P(B) = \frac{5}{8}$, e também $P(B) = P(B \cap D) + P\left(B \cap \overline{D}\right) = \frac{2}{3} \times (1 - p) + \frac{1}{2} \times p$

Temos que, a probabilidade de se obter um sector numerado com o algarismo 2, ou seja, o valor de p, é dado por:

$$\frac{2}{3} \times (1 - p) + \frac{1}{2} \times p = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{2 - 2p}{3} + \frac{p}{2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{16 - 16p}{24} + \frac{12p}{24} = \frac{15}{224} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16p + 12p = 15 \Leftrightarrow 16 - 15 = 16p - 12p \Leftrightarrow 1 = 4p \Leftrightarrow p = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = 0{,}25$$

E assim, o valor da probabilidade de se obter um sector numerado com o algarismo 2, na forma de percentagem é 25%