Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais **(2018, Época especial)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o divisor padrão, que se supõe ser 166, se calcula dividindo o número total de eleitores do município, ou seja, $3306 + 514 + 697 + 463 = 4980$ por N, temos que:

$$166 = \frac{4980}{N} \Leftrightarrow N = \frac{4980}{166} \Leftrightarrow N = 30$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

Freguesia	**A**	**B**	**C**	**D**
Número de eleitores	3306	514	697	463
Total de eleitores	$3306 + 514 + 697 + 463 = 4980$			
Divisor padrão	$\frac{4980}{28} \approx 177{,}9$			
Quota padrão	$\frac{3306}{177{,}9} \approx 18{,}6$	$\frac{514}{177{,}9} \approx 2{,}9$	$\frac{697}{177{,}9} \approx 3{,}9$	$\frac{463}{177{,}9} \approx 2{,}6$
Quota arredondada	$18 + 1 = 19$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$2 + 1 = 3$
Soma das quotas arredondadas	$19 + 3 + 4 + 3 = 29$			
Divisor modificado	$\frac{4980}{28} + 10 \approx 187{,}9$			
Quota padrão modificada	$\frac{3306}{187{,}9} \approx 17{,}6$	$\frac{514}{187{,}9} \approx 2{,}7$	$\frac{697}{187{,}9} \approx 3{,}7$	$\frac{463}{187{,}9} \approx 2{,}5$
Quota arredondada modificada	$17 + 1 = 18$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$2 + 1 = 3$
Soma das quotas modificadas	$18 + 3 + 4 + 3 = 28$			

Assim, a comissão de festas resultante da aplicação do método descrito. é constituída por:

- 18 elementos da freguesia A,
- 3 elementos da freguesia B,
- 4 elementos da freguesia C,
- 3 elementos da freguesia D.

2. Aplicando o método descrito, vem:

Bem \ Presidente da Junta de Freguesia	A	B	C
E	224	182	226
M	2050	2000	1800
T	4950	5003	6005
Valor global	7224	7185	8031
Valor considerado justo	2408	2395	2677
Atribuição de bens	M	—	E+T
Valor monetário recebido	2050	0	6231
Excedente disponibilizado	—	—	3554
Valor em falta recebido	358	2395	—
Montante disponibilizado em excesso	801		
Divisão final	267	267	267

Assim, a distribuição final é:

- Presidente da Junta de Freguesia A:
  Recebe o motocultivador e $358 + 267 = 625$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia B:
  Recebe $2395 + 267 = 2662$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia C:
  Recebe a enfardadeira e o trator e paga $3554 - 267 = 3287$ euros

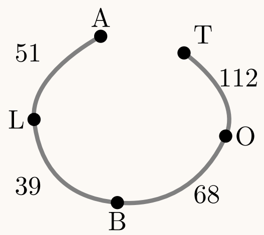
3. De acordo com a tabela, considerando as arestas por ordem crescente de ponderação, e desenhando um grafo que resulta da aplicação do algoritmo, temos:

   I- Aresta BL - ponderação 39

   II- Aresta LA - ponderação 51
   (não se considera a aresta BA, porque forma um circuito)

   III- Aresta BO - ponderação 68
   (não se considera a aresta LO, porque forma um circuito)

   IV- Aresta OT - ponderação 112



Observando o grafo, temos que:

- Número de vértices: 5
- Número de arestas: 4=5-1
- Ponderação total: $39 + 51 + 68 + 112 = 270$

Desta forma, nas condições do enunciado, o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial 270 km de estrada.

4.

4.1. Recorrendo à calculadora podemos calcular o número de eleitores inscritos no momento da criação da freguesia, ou seja, zero anos após a sua criação ($t = 0$):

$$E(0) = 7700 - 1471\ln(0 + 1) = 7700$$

De forma análoga podemos calcular o número de eleitores inscritos cinco anos após a sua criação ($t = 5$):

$$E(5) = 7700 - 1471\ln(5 + 1) \approx 5064$$

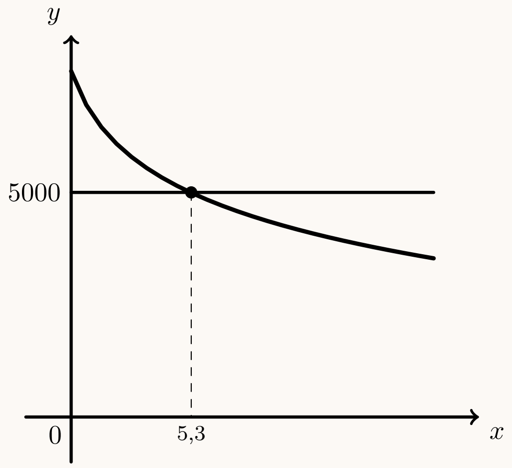
Logo, o valor da redução do número de eleitores da freguesia, nos primeiros cinco anos, é:

$$E(0) - E(5) = 7700 - 5064 = 2636$$

4.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da evolução do número de eleitores em função do tempo tempo ($y = 7700 - 1471\ln(x + 1)$) e a reta correspondente à representação de 5000 eleitores ($y = 5000$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo do número de eleitores, ou seja, $0 \leq x < 16$ e também com os valores esperados para a evolução do número de eleitores (valores inferiores a 7700), ou seja, $0 \leq y < 7700$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, os valores correspondente aos anos passados depois de 2002 em que o número de eleitores é igual a 5000, ou seja, o ponto de coordenadas (5,3 ; 5000)

Assim, temos que esta freguesia tem um número de eleitores que garante que a assembleia é constituída por 13 elementos em 2002 e nos 5 anos seguintes, ou seja, nos anos de 2002, 2003, 2004, 2004, 2006 e 2007.



5. Como a família Silva é composta por cinco pessoas e os automóveis do tipo 1, têm capacidade para apenas quatro passageiros, será necessário alugar dois automóveis deste tipo (o que não é um problema porque duas pessoas possuem carta de condução).
Assim, calculando os custos associados a cada uma das propostas, temos:

Automóvel	Consumo total (litros)	Consumo - custo (euros)	Aluguer por dia (euros)	Custo total (euros)
Tipo 1 (1 unidade)	$4{,}7 \times \frac{1300}{100} = 4{,}7 \times 13 = 61{,}1$	$61{,}1 \times 1{,}3 = 79{,}43$	$40 \times 6 = 240$	$79{,}43 + 240 = 319{,}43$
Tipo 1 (2 unidades)	—	—	—	$319{,}43 \times 2 = 638{,}46$
Tipo 2 (1 unidade)	$6{,}8 \times \frac{1300}{100} = 6{,}8 \times 13 = 88{,}4$	$88{,}4 \times 1{,}3 = 114{,}92$	$85 \times 6 = 510$	$114{,}92 + 510 = 624{,}92$

Assim, como se sabe que a família Silva optou pela proposta mais económica, podemos concluir que alugou um automóvel do tipo 2.

6.

6.1.

6.1.1. Observando o diagrama de caule-e-folhas, podemos verificar que 6 atletas registaram um tempo de prova inferior a 54, pelo que, do total, ou seja, dos 20 atletas, 14 registaram um tempo de prova de, pelo menos, 54 minutos.

Desta forma a percentagem corresponde é $\frac{14}{20} \times 100 = 70$, ou seja, 70%

Resposta: **Opção D**

6.1.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores:

$$50 \quad 50 \quad 50 \quad 54 \quad 56 \quad 56 \quad 56 \quad 57 \quad 62 \quad 62 \quad 63 \quad 65 \quad 69 \quad 74 \quad 74 \quad 74 \quad 79$$

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os seguintes valores para a média e o desvio padrão (com arredondamento às unidades):

$$\overline{x} = 59{,}65 \text{ e } s \approx 10$$

Assim, temos que o intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$ é:

$$]59{,}65 - 10\,;\, 59{,}65 + 10[=]49{,}65\,;\, 69{,}65[$$

Logo, existem 13 registos dentro deste intervalo, ou seja todos exceto os três abaixo de 50 e os quatro acima de 70.

6.2. Pela observação do primeiro histograma, podemos afirmar que $23 + 44 = 67\%$ das participantes do género feminino tinha idade inferior a 40 anos.

Como 1300 atletas eram do género masculino, num total de 1600 atletas, então o número de participantes do género feminino é $1600 - 1300 = 300$

Assim o número de participantes do género feminino com idade inferior a 40 anos corresponde a 67% das 300 atletas do género feminino, ou seja $300 \times 0{,}67 = 201$

Como na corrida participaram 682 atletas, de ambos os géneros, com idade inferior a 40 anos, podemos concluir que o número de participantes do género masculino é $682 - 201 = 481$

Como 15% dos 1300 participantes masculinos tem menos do que 30 anos (de acordo com o segundo histograma), o número de participantes masculinos com menos de 30 anos é $1300 \times 0{,}15 = 195$

Assim, o número de participantes do género masculino com idade superior a 30 anos e inferior a 40, é $481 - 195 = 286$

Finalmente, a percentagem de participantes do género masculino com idade superior a 30 anos e inferior a 40, ou seja o valor de a, é:

$$a = \frac{286}{1300} \times 100 = 22$$

7.

7.1. Como a família Silva participou em quatro romarias e se pretende calcular a probabilidade de ter ido sem companhia em apenas uma ocasião, essa circunstância pode ter ocorrido na primeira romaria, na segunda, na terceira ou na quarta.

Sabemos que a probabilidade da família ir com companhia é de 70%, ou seja, 0,7, pelo que a probabilidade de ir sem companhia é de $1 - 0{,}7 = 0{,}3$

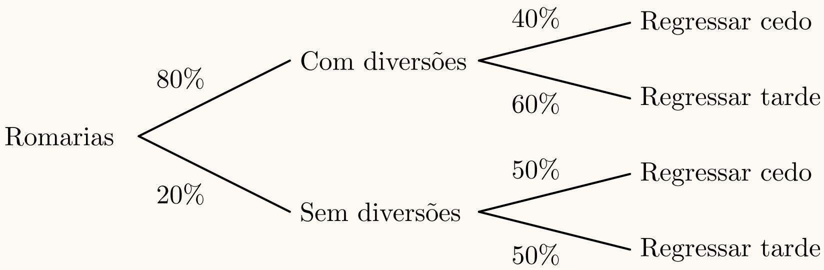
Assim, a probabilidade da família ter ido sem companhia em apenas uma das quatro ocasiões é:

$$\overbrace{0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7}^{\text{sem companhia na 1.}^{\text{a}}} + \overbrace{0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7}^{\text{sem companhia na 2.}^{\text{a}}} + \overbrace{0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7}^{\text{sem companhia na 3.}^{\text{a}}} + \overbrace{0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3}^{\text{sem companhia na 4.}^{\text{a}}} =$$

$$= 4 \times (0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7) = 4 \times 0{,}3 \times 0{,}7^3 = 0{,}4116$$

Assim, a probabilidade solicitada, na forma de percentagem é 41,16%

7.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em considerar, ao acaso, uma visita da família Silva a uma romaria, e os acontecimentos:
D:≪A família Silva vai a uma romaria com diversões≫
T:≪A família Silva regressa a casa tarde≫

Temos, que a probabilidade de a família Silva ir a uma romaria com diversões, sabendo que regressa tarde a casa, na forma de dízima, arredondada às centésimas, é:

$$P\left(D|T\right) = \frac{P\left(D \cap T\right)}{P\left(T\right)} = \frac{P\left(D \cap T\right)}{P\left(T \cap D\right) + P\left(T \cap \overline{D}\right)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}6}{0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}5} = \frac{0{,}48}{0{,}58} \approx 0{,}83$$

8.

8.1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A proporção amostral das pessoas satisfeitas, arredondado às centésimas: $\hat{p} = \dfrac{235}{342} \approx 0{,}73$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com quatro casas decimais, temos:

$$\left] 0{,}73 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{324}}\ ;\ 0{,}73 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}73(1-0{,}73)}{324}} \right[\approx \left]0{,}6665; 0{,}7935\right[$$

Assim, o intervalo de confiança a 99% para a percentagem de pessoas satisfeitas, com os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades, é: $]\,67\,\%\,;\,79\,\%\,[$

Desta forma, a equipa não pode afirmar que a festa não foi um êxito, porque 75% do total da população terá ficado satisfeita, uma vez que esta percentagem pertence ao intervalo de confiança construído para a proporção de pessoas satisfeitas.

8.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o desvio padrão populacional (σ), sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A média amostral: $\overline{x} = 56$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$
- $\overline{x} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 55$, ou, em alternativa, $\overline{x} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 57$

Assim, temos:

$$56 + 1{,}960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 - 56 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1 \times \sqrt{324}}{1{,}960} \Rightarrow \sigma \approx 9{,}18$$

Resposta: **Opção C**