

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 2018 - Época especial

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o divisor padrão, que se supõe ser 166, se calcula dividindo o número total de eleitores do município, ou seja, $3306 + 514 + 697 + 463 = 4980$ por N , temos que:

$$166 = \frac{4980}{N} \Leftrightarrow N = \frac{4980}{166} \Leftrightarrow N = 30$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

Freguesia	A	B	C	D
Número de eleitores	3306	514	697	463
Total de eleitores	$3306 + 514 + 697 + 463 = 4980$			
Divisor padrão	$\frac{4980}{28} \approx 177,9$			
Quota padrão	$\frac{3360}{177,9} \approx 18,9$	$\frac{514}{177,9} \approx 2,9$	$\frac{697}{177,9} \approx 3,9$	$\frac{463}{177,9} \approx 2,6$
Quota arredondada	$18 + 1 = 19$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$2 + 1 = 3$
Soma das quotas arredondadas	$19 + 3 + 4 + 3 = 29$			
Divisor modificado	$\frac{4980}{28} + 10 \approx 187,9$			
Quota padrão modificada	$\frac{3360}{187,9} \approx 17,8$	$\frac{514}{187,9} \approx 2,7$	$\frac{697}{187,9} \approx 3,7$	$\frac{463}{187,9} \approx 2,4$
Quota arredondada modificada	$17 + 1 = 18$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$2 + 1 = 3$
Soma das quotas modificadas	$18 + 3 + 4 + 3 = 28$			

Assim, a comissão de festas resultante da aplicação do método descrito, é constituída por:

- 18 elementos da freguesia A,
- 3 elementos da freguesia B,
- 4 elementos da freguesia C,
- 3 elementos da freguesia D.



2. Aplicando o método descrito, vem:

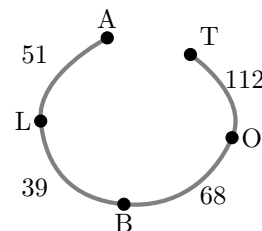
Bem	Presidente da Junta de Freguesia		
	A	B	C
E	224	182	226
M	2050	2000	1800
T	4950	5003	6005
Valor global	7224	7185	8031
Valor considerado justo	2408	2395	2677
Atribuição de bens	M	—	E+T
Valor monetário recebido	2050	0	6231
Excedente disponibilizado	—	—	3554
Valor em falta recebido	358	2395	—
Montante disponibilizado em excesso	801		
Divisão final	267	267	267

Assim, a distribuição final é:

- Presidente da Junta de Freguesia A:
Recebe o motocultivador e $358 + 267 = 625$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia B:
Recebe $2395 + 267 = 2662$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia C:
Recebe a enfardadeira e o trator e paga $3554 - 267 = 3287$ euros

3. De acordo com a tabela, considerando as arestas por ordem crescente de ponderação, e desenhando um grafo que resulta da aplicação do algoritmo, temos:

- I- Aresta BL - ponderação 39
- II- Aresta LA - ponderação 51
(não se considera a aresta BA, porque forma um circuito)
- III- Aresta BO - ponderação 68
(não se considera a aresta LO, porque forma um circuito)
- IV- Aresta OT - ponderação 112



Observando o grafo, temos que:

- Número de vértices: 5
- Número de arestas: $4=5-1$
- Ponderação total: $39 + 51 + 68 + 112 = 270$

Desta forma, nas condições do enunciado, o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial 270 km de estrada.



4.

- 4.1. Recorrendo à calculadora podemos calcular o número de eleitores inscritos no momento da criação da freguesia, ou seja, zero anos após a sua criação ($t = 0$):

$$E(0) = 7700 - 1471 \ln(0 + 1) = 7700$$

De forma análoga podemos calcular o número de eleitores inscritos cinco anos após a sua criação ($t = 5$):

$$E(5) = 7700 - 1471 \ln(5 + 1) \approx 5064$$

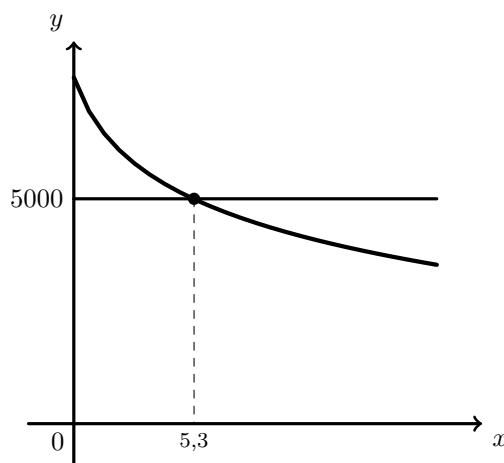
Logo, o valor da redução do número de eleitores da freguesia, nos primeiros cinco anos, é:

$$E(0) - E(5) = 7700 - 5064 = 2636$$

- 4.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da evolução do número de eleitores em função do tempo tempo ($y = 7700 - 1471 \ln(x + 1)$) e a reta correspondente à representação de 5000 eleitores ($y = 5000$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo do número de eleitores, ou seja, $0 \leq x < 16$ e também com os valores esperados para a evolução do número de eleitores (valores inferiores a 7700), ou seja, $0 \leq y < 7700$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, os valores correspondente aos anos passados depois de 2002 em que o número de eleitores é igual a 5000, ou seja, o ponto de coordenadas (5,3; 5000)

Assim, temos esta freguesia tem um número de eleitores que garante a assembleia é constituída por 13 elementos em 2002 e nos 5 anos seguintes, ou seja, nos anos de 2002, 2003, 2004, 2004, 2006 e 2007.



5. Como a família Silva é composta por cinco pessoas e os automóveis do tipo 1, têm capacidade para apenas quatro passageiros, será necessário alugar dois automóveis deste tipo (o que não é um problema porque duas pessoas possuem carta de condução).

Assim, calculando os custos associados a cada uma das propostas, temos:

Automóvel	Consumo total (litros)	Consumo - custo (euros)	Aluguer por dia (euros)	Custo total (euros)
Tipo 1 (1 unidade)	$4,7 \times \frac{1300}{100} =$ $= 4,7 \times 13 =$ $= 61,1$	$61,1 \times 1,3 = 79,43$	$40 \times 6 = 240$	$79,43 + 240 =$ $= 319,43$
Tipo 1 (2 unidades)	—	—	—	$319,43 \times 2 =$ $= 638,46$
Tipo 2 (1 unidade)	$6,8 \times \frac{1300}{100} =$ $= 6,8 \times 13 =$ $= 88,4$	$88,4 \times 1,3 = 114,92$	$85 \times 6 = 510$	$114,92 + 510 =$ $= 624,92$

Assim, como se sabe que a família Silva optou pela proposta mais económica, podemos concluir que alugou um automóvel do tipo 2.



6.

6.1.

6.1.1. Observando o diagrama de caule-e-folhas, podemos verificar que 6 atletas registaram um tempo de prova inferior a 54, pelo que, do total, ou seja, dos 20 atletas, 14 registaram um tempo de prova de, pelo menos, 54 minutos.

Desta forma a percentagem corresponde é $\frac{14}{20} \times 100 = 70$, ou seja, 70%

Resposta: **Opção D**

6.1.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores:

50 50 50 54 56 56 56 57 62 62 63 65 69 74 74 74 79

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os seguintes valores para a média e o desvio padrão (com arredondamento às unidades):

$$\bar{x} = 59,65 \text{ e } s \approx 10$$

Assim, temos que o intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$ é:

$$]59,65 - 10 ; 59,65 + 10[=]49,65 ; 69,65[$$

Logo, existem 13 registos dentro deste intervalo, ou seja todos exceto os três abaixo de 50 e os quatro acima de 70.

6.2. Pela observação do primeiro histograma, podemos afirmar que $23 + 44 = 67\%$ das participantes do género feminino tinha idade inferior a 40 anos.

Como 1300 atletas eram do género masculino, num total de 1600 atletas, então o número de participantes do género feminino é $1600 - 1300 = 300$

Assim o número de participantes do género feminino com idade inferior a 40 anos corresponde a 67% das 300 atletas do género feminino, ou seja $300 \times 0,67 = 201$

Como na corrida participaram 682 atletas, de ambos os géneros, com idade inferior a 40 anos, podemos concluir que o número de participantes do género masculino é $682 - 201 = 481$

Como 15% dos 1300 participantes masculinos tem menos do que 30 anos (de acordo com o segundo histograma), o número de participantes masculinos com menos de 30 anos é $1300 \times 0,15 = 195$

Assim, o número de participantes do género masculino com idade superior a 30 anos e inferior a 40, é $481 - 195 = 286$

Finalmente, a percentagem de participantes do género masculino com idade superior a 30 anos e inferior a 40, ou seja o valor de a , é:

$$a = \frac{286}{1300} \times 100 = 22$$



7.

7.1. Como a família Silva participou em quatro romarias e se pretende calcular a probabilidade de ter ido sem companhia em apenas uma ocasião, essa circunstância pode ter ocorrido na primeira romaria, na segunda, na terceira ou na quarta.

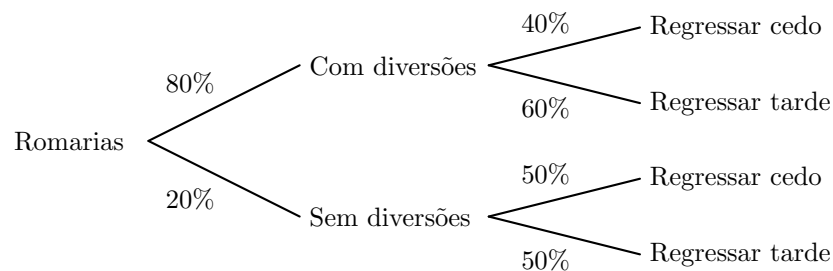
Sabemos que a probabilidade da família ir com companhia é de 70%, ou seja, 0,7, pelo que a probabilidade de ir sem companhia é de $1 - 0,7 = 0,3$

Assim, a probabilidade da família ter ido sem companhia em apenas uma das quatro ocasiões é:

$$\begin{aligned} & \overbrace{0,3 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7}^{\text{sem companhia na 1.ª}} + \overbrace{0,7 \times 0,3 \times 0,7 \times 0,7}^{\text{sem companhia na 2.ª}} + \overbrace{0,7 \times 0,7 \times 0,3 \times 0,7}^{\text{sem companhia na 3.ª}} + \overbrace{0,7 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,3}^{\text{sem companhia na 4.ª}} = \\ & = 4 \times (0,3 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7) = 4 \times 0,3 \times 0,7^3 = 0,4116 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade solicitada, na forma de percentagem é 41,16%

7.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em considerar, ao acaso, uma visita da família Silva a uma romaria, e os acontecimentos:

D : «A família Silva vai a uma romaria com diversões»

T : «A família Silva regressa a casa tarde»

Temos, que a probabilidade de a família Silva ir a uma romaria com diversões, sabendo que regressa tarde a casa, na forma de dízima, arredondada às centésimas, é:

$$P(D|T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T \cap D) + P(T \cap \bar{D})} = \frac{0,8 \times 0,6}{0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,5} = \frac{0,48}{0,58} \approx 0,83$$

8.

8.1. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A proporção amostral das pessoas satisfeitas, arredondado às centésimas: $\hat{p} = \frac{235}{342} \approx 0,73$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, e arredondando os valores às unidades, temos:

$$\left[0,73 - 2,576\sqrt{\frac{0,73(1-0,73)}{324}}; 0,73 + 2,576\sqrt{\frac{0,73(1-0,73)}{324}} \right] \approx]0,6665; 0,7935[$$

Assim, o intervalo de confiança a 99% para a percentagem de pessoas satisfeitas, com os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades, é:] 67%; 79% [

Desta forma, a equipa não pode afirmar que a festa não foi um êxito, porque 75% do total da população terá ficado satisfeita, uma vez que esta percentagem pertence ao intervalo de confiança construído para a proporção de pessoas satisfeitas.



8.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o desvio padrão populacional (σ), sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A média amostral: $\bar{x} = 56$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$
- $\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 55$, ou, em alternativa, $\bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 57$

Assim, temos:

$$56 + 1,960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 \Leftrightarrow 1,960 \times \frac{\sigma}{\sqrt{324}} = 57 - 56 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1 \times \sqrt{324}}{1,960} \Rightarrow \sigma \approx 9,18$$

Resposta: **Opção C**