Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 2018 - 2.ª Fase

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o nível de abstenção foi de 20%, apenas 80% dos 75 elementos da companhia de teatro votaram, ou seja, foram apurados $75 \times 0{,}8 = 60$ votos.

Como a percentagem de votos validamente expressos foi de 95%, temos que os votos validamente expressos foram $60 \times 0{,}95 = 57$

Assim, descontando a este total, os votos nas cidades A e B, obtemos os votos validamente expressos na cidade C:

$$57 - 14 - 17 = 26$$

Resposta: **Opção A**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

Cidade	**A**	**B**	**C**
N.º de habitantes	4320	1960	6050
Divisão por 1	4321	1960	6050
Divisão por 3	$\frac{4320}{3} = 1440$	$\frac{1960}{3} \approx 653$	$\frac{6050}{3} \approx 2017$
Divisão por 5	$\frac{4320}{5} = 864$		$\frac{6050}{5} = 1210$
Divisão por 7			$\frac{6050}{7} \approx 864$

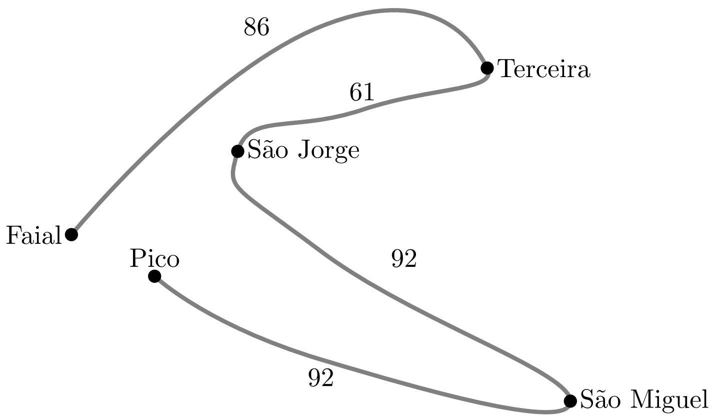
Como se coloca a situação de ficar somente uma sessão por atribuir e de os quocientes, arredondados às unidades, serem iguais e correspondentes a cidades diferentes, a sessão é atribuída à cidade A, porque tem um menor número de habitantes.

Assim, o número de sessões da peça que serão apresentadas em cada uma das cidades é:

- Cidade A: 3 sessões
- Cidade B: 1 sessão
- Cidade C: 3 sessões

2. De acordo com o grafo, iniciando o percurso na ilha do Faial e usando o método descrito, excluindo as ilhas de Santa Maria, Graciosa, Flores e Corvo, por terem menos de 6000 habitantes, obtemos a seguinte ordenação esquematizada no grafo da figura:

   - Faial - Terceira (86€)
   - Terceira - São Jorge (61€)
   - São Jorge - São Miguel (92€)
   - São Miguel - Pico (92€)

   E assim o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, determinado a partir da aplicação do algoritmo é:

   $$86 + 61 + 92 + 92 = 331€$$

3. Como o valor total da ilha é 270 000 PRC, e a metade sul da ilha está avaliada num valor correspondente ao dobro do valor da metade norte, a avaliação total divide-se em $\frac{2}{3}$ para a metade sul e $\frac{1}{3}$ para a metade norte, ou seja:

   - Metade sul: $\frac{2}{3} \times 270\,000 = 180\,000$ PRC
   - Metade norte: $\frac{1}{3} \times 270\,000 = 90\,000$ PRC

   Como a parte da metade norte do setor delimitado por Bruno tem um valor de 15 000 PRC, podemos calcular a amplitude do setor da parte norte delimitado por Bruno:

   $$\frac{180°}{x} = \frac{90\,000}{15\,000} \Leftrightarrow 180° \times 15\,000 = x \times 90\,000 \Leftrightarrow \frac{270\,000}{90\,000} = x \Leftrightarrow x = 30°$$

   Como o Bruno considera justo receber $\frac{1}{3}$ do valor da ilha, ou seja $\frac{1}{3} \times 270\,000 = 90\,000$ PRC, deverá receber da parte sul, um setor com o valor de $90\,000 - 15\,000 = 75\,000$ PRC, pelo que a respetiva amplitude é:

   $$\frac{180°}{y} = \frac{180\,000}{75\,000} \Leftrightarrow 180° \times 75\,000 = y \times 180\,000 \Leftrightarrow \frac{13\,500\,000}{180\,000} = y \Leftrightarrow y = 75°$$

   Assim, a amplitude total, em graus, do sector circular delimitado por Bruno é:

   $$x + y = 30° + 75° = 105°$$

4. Calculado as despesas totais previstas para cada uma das propostas, temos:

Proposta A	**Proposta B**
Custos totais de aluguer (10 dias): $10 \times 420 = 4200$ € Custo acrescido (valor fixo): 4800 € Despesas com água e eletricidade: 0 €	Valor do aluguer (10 dias): $V = 3000 \times 1{,}14^{10} - 3000 \approx 8122$ € Despesas com água e eletricidade (10 dias): $10 \times 71 = 710$ €
Custo total: $4200 + 4800 + 0 = 9000$ €	Custo total: $8122 + 710 = 8832$ €

   Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a opção do diretor da companhia, pela proposta B, foi a decisão mais económica.

5.

5.1. Observando a expressão que define o modelo N, podemos verificar que se trata de um modelo logístico, limitado superiormente pela assintota de equação $y = 246$, pelo que o modelo não permite a existência de valores superiores a 246.

Por outro lado, calculando $N(0)$, temos:

$$N(0) = \frac{246}{1 + ae^{-0{,}65\times 0}} = \frac{246}{1 + ae^0} = \frac{246}{1 + a \times 1} = \frac{246}{1 + a}$$

E assim, como a é um número real positivo, temos que $N(0)$ é um número real maior que zero.

Desta forma, de entre as opções apresentadas, a única que verifica cumulativamente as duas condições enunciadas anteriormente é o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção C**

5.2.

5.2.1. Como o modelo aproxima a altura em função de t, medido em minutos, temos que 30 segundos após o *parasail* se ter elevado no ar, deve ser entendido como meio minuto, ou seja $t = 0{,}5$

Assim temos que:

- $A(0{,}5) = 1 + 35\ln(25{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}98) \approx 92{,}685$
- $A(1) = 1 + 35\ln(25{,}5 \times 1 + 0{,}98) \approx 115{,}674$

Desta forma o aumento da altura entre os 30 segundos e 1 minuto foi:

$$A(1) - A(0{,}5) \approx 115{,}674 - 92{,}685 \approx 22{,}989$$

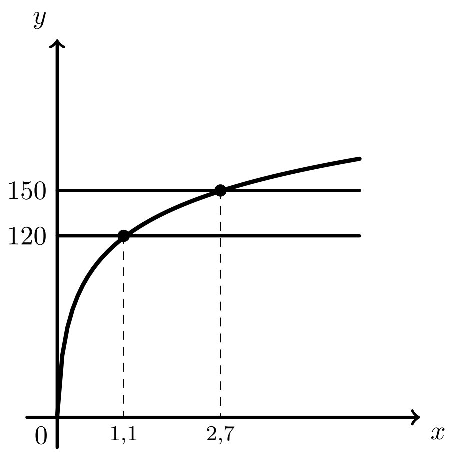
Logo, a percentagem (p) relativamente à altura ao fim de 30 segundos, ou seja, o aumento da altura em percentagem arredondada às unidades, é:

$$\frac{p}{A(1) - A(0{,}5)} = \frac{100}{A(0{,}5)} \Rightarrow p \approx \frac{22{,}989 \times 100}{92{,}685} \approx 25\%$$

5.2.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da altura em função do tempo ($y = 1 + 35\ln(25{,}5x + 0{,}98)$) e das retas correspondentes à representação das alturas 120 e 150 ($y = 120$ e $y = 150$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 5$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $0 \leq y < 200$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que o *parasail* estava, respetivamente a 120 metros e a 150 metros de altura, ou seja, os pontos de coordenadas $(1{,}1\,;\,120)$ e $(2{,}7\,;\,150)$

Assim, podemos concluir que o *parasail* se manteve a uma altura entre os 120 e os 150 metros durante $2{,}7 - 1{,}1 = 1{,}6$ segundos, aproximadamente, ou seja, durante menos de 2 segundos, pelo que o ator não tem razão.



6.

6.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma, inserir esses valores numa lista da calculadora gráfica e noutra lista a respetiva frequência absoluta, ou seja, a tabela seguinte:

Marca de classe	**Frequência absoluta simples**
$\frac{100+150}{2} = 125$	16
$\frac{150+200}{2} = 175$	24
$\frac{200+250}{2} = 225$	8
$\frac{250+300}{2} = 275$	32
$\frac{300+350}{2} = 325$	20

Calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média:

$$\overline{x} = 233$$

Identificando no histograma a classe modal, ou seja, a classe com maior frequência - a classe [250,300[- podemos verificar que a média dos dados agrupados não pertence à classe modal.

6.2. Observando os histogramas e escrevendo os dados numa tabela obtemos as duas colunas apresentadas a sombreado na tabela seguinte.

A partir da frequência absoluta acumulada (relativa às ilhas dos Açores e Madeira) é possível obter a coluna da frequência absoluta simples (relativa às ilhas dos Açores e Madeira), por subtrações sucessivas, também apresentada na tabela seguinte.

Finalmente, somando as frequências absolutas simples de Portugal continental e as relativas às ilhas dos Açores e Madeira, obtemos a tabela de frequências absolutas simples, considerando os dados das 150 sessões realizadas, 100 em Portugal Continental e 50 nas ilhas dos Açores e da Madeira, mantendo as classes utilizadas:

Número de espectadores	**Frequência absoluta simples Portugal Continental**	**Frequência absoluta acumulada Açores e Madeira**	**Frequência absoluta simples Açores e Madeira**	**Frequência absoluta simples Total**
[100,150[	16	12	12	$16 + 12 = 28$
[150,200[	24	30	$30 - 12 = 18$	$24 + 18 = 42$
[200,250[	8	38	$38 - 30 = 8$	$8 + 8 = 16$
[250,300[	32	44	$44 - 38 = 6$	$32 + 6 = 38$
[300,350[	20	50	$50 - 44 = 6$	$20 + 6 = 26$

7.

7.1. Como se sabe a pessoa escolhida ocupa um lugar no balcão, temos $42+46 = 88$ casos possíveis. Como de entre estas pessoas 42 são mulheres, ou seja, existem 42 casos favoráveis, pelo que a probabilidade, arredondada às centésimas, é:

$$\frac{42}{88} \approx 0{,}48$$

Resposta: **Opção B**

7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um espectador da sessão, e os acontecimentos:
O:≪O espectador comprou o bilhete online≫
P:≪O espectador comprou um bilhete para a plateia≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(O) = 0{,}8$ e $P\left(P|\overline{O}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Temos ainda, de acordo com a tabela, que: $P(P) = \frac{73+59}{73+59+42+46} = 0{,}6$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{O}\right) = 1 - P(O) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(P \cap \overline{O}\right) = P\left(\overline{O}\right) \times P\left(P|\overline{O}\right) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$
- $P(P \cap O) = P(P) - P\left(P \cap \overline{O}\right) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$

	P	$\overline{P}$	
O	0,45		0,8
$\overline{O}$	0,15		0,2
	0,6		1

Desta forma, a probabilidade de escolher, ao acaso, uma pessoa presente na sessão e essa pessoa ocupar um lugar na plateia, sabendo-se que ela adquiriu o seu bilhete online, é:

$$P(P|O) = \frac{P(P \cap O)}{P(O)} = \frac{0{,}45}{0{,}8} \approx 0{,}5625$$

A que corresponde uma probabilidade, em percentagem, de 56,25%

7.3. A probabilidade de apenas uma das mulheres escolhidas ocupar um lugar na plateia é a soma das probabilidade da primeira mulher selecionada estar na plateia e a segunda no balcão, com a probabilidade da primeira mulher selecionada estar no balcão e a segunda estar na plateia.

Assim, a probabilidade de apenas uma das mulheres escolhidas ocupar um lugar na plateia é:

$$\overbrace{\frac{73}{73+42} \times \frac{42}{72+42}}^{1.^{\text{a}} \text{ na plateia e } 2.^{\text{a}} \text{ no balcão}} + \overbrace{\frac{42}{73+42} \times \frac{73}{73+41}}^{1.^{\text{a}} \text{ no balcão e } 2.^{\text{a}} \text{ na plateia}} \approx 0{,}468$$

A que corresponde uma probabilidade, em percentagem, arredondada às unidades, de 47%

8. Como o valor médio do intervalo de confiança é a média amostral, temos que o valor médio das receitas de bilheteira por sessão ($\overline{x}$), é:

$$\overline{x} = \frac{4449{,}691 + 5214{,}309}{2} = 4832$$

Considerando o extremo superior do intervalo de confiança, temos que: $\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} = 5214{,}309$, e como a dimensão da amostra é $n = 50$ e ainda $z = 1{,}960$ (associado a um nível de confiança de 95%), logo o valor do desvio padrão amostral (s), com arredondamento às unidades, é:

$$4832 + 1{,}960 \times \frac{s}{\sqrt{50}} = 5214{,}309 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{s}{\sqrt{50}} = 5214{,}309 - 4832 \Leftrightarrow s = \frac{382{,}309 \times \sqrt{50}}{1{,}960} \Rightarrow s \approx 1379$$