

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2019, Época especial)
Proposta de resolução



1.

1.1. Como o total de acionistas é $296 + 364 + 134 = 794$, a proporção de acionistas do grupo C é $\frac{134}{794} \approx 0,169$

Logo, a proporção correspondente dos 150 convites é $150 \times 0,169 = 25,35$, pelo que devem ser atribuídos 25 convites ao grupo C.

Resposta: **Opção B**

1.2. Aplicando o método descrito, temos que:

	A	B	C
Número de acionistas	296	364	134
Total de acionistas	$296 + 364 + 134 = 794$		
Divisor padrão	$\frac{794}{150} \approx 5,3$		
Quota padrão	$\frac{296}{5,3} \approx 55,8$	$\frac{364}{5,3} \approx 68,7$	$\frac{134}{5,3} \approx 25,3$
L	55	68	25
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{55 \times 56} \approx 55,5$	$\sqrt{68 \times 69} \approx 68,5$	$\sqrt{25 \times 26} \approx 25,5$
Quota arredondada	$55 + 1 = 56$	$68 + 1 = 69$	25
Soma das quotas arredondadas	$56 + 69 + 25 = 150$		

Assim, temos que o número de convites que cada grupo de investimento irá receber, é:

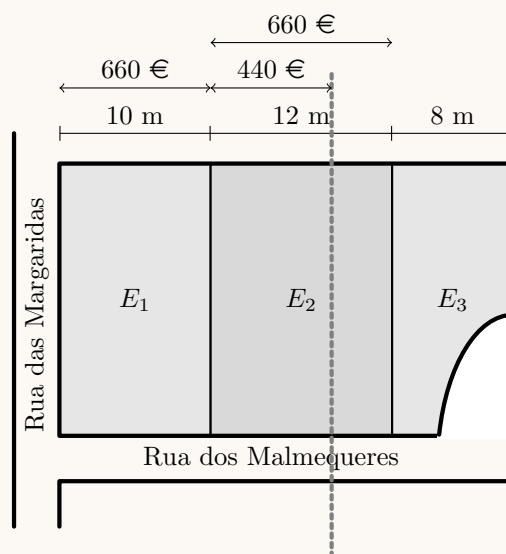
- Grupo A: 56 convites
- Grupo B: 69 convites
- Grupo C: 25 convites

2. Como se pretende que a Cristina fique com uma parcela cujo valor monetário do arrendamento seja o dobro do valor monetário do arrendamento a pagar pelo Jorge, a parcela da Cristina deve ter um valor monetário de $\frac{2}{3}$ do total, ou seja, $\frac{2}{3} \times 1650 = 1100$ euros, e a parcela do Jorge deve ter o valor monetário de $\frac{1}{3}$ do total, ou seja, $\frac{1}{3} \times 1650 = 550$ euros.

Assim, a parcela da Cristina deverá composta pela totalidade do espaço E_1 , avaliado em 40% do total, ou seja, $0,4 \times 1650 = 660$ euros, e mais a parte do espaço E_2 cujo valor monetário corresponda a $1100 - 660 = 440$ euros, como se indica na figura ao lado.

Logo, como a avaliação do espaço E_2 é 40% do total, ou seja, $0,4 \times 1650 = 660$ euros, e corresponde a 12 metros, estabelecendo a proporção da parte avaliada em 440 euros, temos:

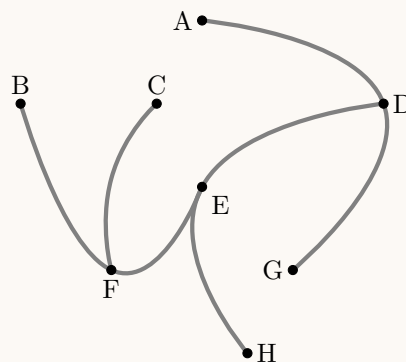
$$\frac{660}{440} = \frac{12}{p} \Leftrightarrow p = \frac{12 \times 440}{660} \Leftrightarrow p = 8 \text{ metros}$$



Desta forma a parcela destinada à Cristina será composta pela totalidade do espaço E_1 (com a largura de 10 metros) e uma parcela de 8 metros do espaço E_2 , totalizando um espaço comercial com a largura de $10 + 8 = 18$ metros.

3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

- I - Aresta B-F - comprimento 14 (menor comprimento)
- II - Aresta C-F - comprimento 15
- III - Aresta E-F - comprimento 16
- IV - Aresta D-G - comprimento 18
(não se considera a aresta B-E, porque forma um ciclo)
- V - Aresta A-D - comprimento 20
- VI - Aresta D-E - comprimento 22
(não se considera a aresta A-B, porque forma um ciclo)(não se considera a aresta B-C, porque forma um ciclo)
- VII - Aresta E-H - comprimento 30



Desta forma, a soma dos comprimentos das ligações é:

$$14 + 15 + 16 + 18 + 20 + 22 + 30 = 135 \text{ m}$$

Como a substituição de cada metro de ligação interna tem o custo de 12 euros, o custo total da substituição é:

$$135 \times 12 = 1620 \text{ euros}$$



4. Calculando o valor do arrendamento anual, de acordo com cada uma das propostas, em função do número de pagamentos, temos:

N.º de pagamentos	Proposta do CCF	Proposta do lojista	Proposta mais vantajosa
1	$R(1) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{1}\right)^1 = 8300$	$8350 + 1 \times 30 = 8380$	CCF
2	$R(2) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{2}\right)^2 = 8400$	$8350 + 2 \times 30 = 8410$	CCF
3	$R(3) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{3}\right)^3 \approx 8462,96$	$8350 + 3 \times 30 = 8440$	Lojista
4	$R(4) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{4}\right)^4 = 8502,25$	$8350 + 4 \times 30 = 8470$	Lojista
5	$R(5) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5 \approx 8537,82$	$8350 + 5 \times 30 = 8500$	Lojista
6	$R(6) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{6}\right)^6 \approx 8561,87$	$8350 + 6 \times 30 = 8530$	Lojista
7	$R(7) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{7}\right)^7 \approx 8580,78$	$8350 + 7 \times 30 = 8560$	Lojista
8	$R(8) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{8}\right)^8 \approx 8596,05$	$8350 + 8 \times 30 = 8590$	Lojista
9	$R(9) = 8000 + 100 \left(1 + \frac{2}{9}\right)^9 \approx 8608,63$	$8350 + 9 \times 30 = 8620$	CCF

Assim, como a tendência de crescimento mais lento da proposta da administração do CCF, se o número de fracionamentos do pagamento do arrendamento anual for superior a 2 ou inferior a 9, a contraproposta do lojista é mais vantajosa do que a proposta apresentada pela administração do CCF.

5.

- 5.1. Como foram inquiridos 50 clientes, 60% corresponde a $0,6 \times 50 = 30$ clientes.

Assim, consultando a tabela podemos verificar que 36 clientes gastaram 36 euros ou menos, ou seja, que 60% dos clientes inquiridos gastaram, em compras, no máximo, 36 euros.

Resposta: **Opção B**

5.2.

- 5.2.1. Como existem 50 registos (referentes aos 50 clientes inquiridos pelo João), e como a média do número de artigos comprados é 1,96, temos que a soma (S) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{50} = 1,96 \Leftrightarrow S = 1,96 \times 50 \Leftrightarrow S = 98$$

Assim, subtraindo ao valor de S os valores dos registos conhecidos, temos:

$$98 - 0 \times 8 - 1 \times 14 - 2 \times 12 - 3 \times 13 = 98 - 0 - 14 - 24 - 39 = 21$$

Desta forma, temos que o valor de a pode ser calculado por:

$$a \times 3 = 21 \Leftrightarrow a = \frac{21}{3} \Leftrightarrow a = 7$$



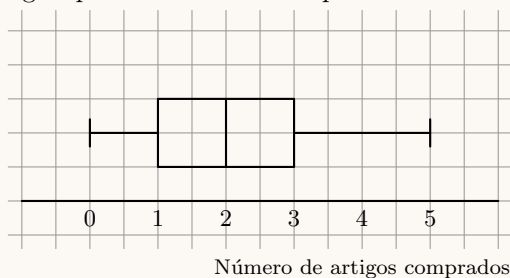
5.2.2. Organizando os dados recolhidos pelo João e pela Maria numa tabela, e agrupando as respostas semelhantes, temos:

N.º de artigos comprados	N.º de clientes (João)	N.º de clientes (Maria)	N.º de clientes (Total)
0	8	10	10
1	14	15	29
2	12	8	20
3	13	7	20
4	3	7	10
5	0	3	3

Inserindo na calculadora, em duas listas, os valores relativos ao N.º de artigos comprados, e ao N.º de clientes (Total), e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os seguintes valores para os extremos e para os quartis:

- Mínimo: 0
- 1.º quartil: 1
- Mediana (2.º Q): 2
- 3.º quartil: 3
- Máximo: 5

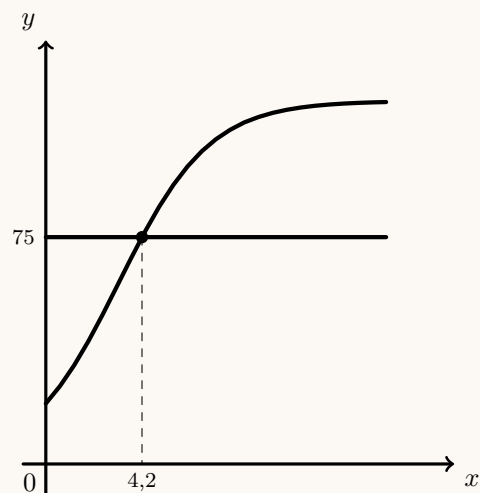
E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis que representa os dados relativos ao número de artigos que os 100 clientes inquiridos:



6.

6.1. Representando na calculadora gráfica, o modelo da variação do número de visitantes do CCF em cada ano ($y = \frac{120}{1 + 5e^{-0,5x}}$), e a reta correspondente a 75 000 visitantes, ou seja, 75 milhares ($y = 75$), numa janela que permita observar a interseção dos dois gráficos, obtemos a representação reproduzida na figura ao lado.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo de variação com a reta, obtemos os valores aproximados (às décimas) das coordenadas, ou seja, o valor correspondente ao número de anos após o início de 1990 em que o número de visitantes foi 75 000; (4,2; 75)



Assim, podemos concluir que o número de visitantes ultrapassou pela primeira vez o valor de 75 000 4,2 anos após o início de 1990, ou seja, durante o ano de 1994.



6.2. Calculando o número anual de visitantes no início de 1995, ou seja 5 anos após o início de 1990, temos:

$$V(5) = \frac{120}{1 + 5e^{-0,5 \times 5}} \approx 85,0807 \text{ milhares de visitantes}$$

Da mesma forma, o número anual de visitantes no início de 2000, ou seja 10 anos após o início de 1990, é:

$$V(10) = \frac{120}{1 + 5e^{-0,5 \times 10}} \approx 116,0890 \text{ milhares de visitantes}$$

Assim, temos que o aumento absoluto do número de visitantes foi:

$$116,0890 - 85,0807 = 31,0083 \text{ milhares de visitantes}$$

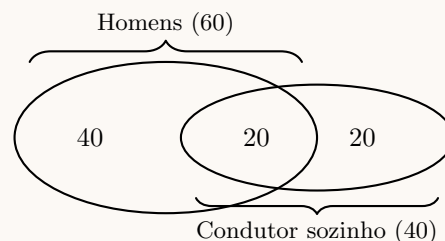
Assim, o valor percentual do aumento do número de visitantes do CCF entre o início de 1995 (100%) e o início de 2000, arredondada às unidades, é:

$$\frac{85,0807}{31,0083} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{31,0083 \times 100}{85,0807} \Rightarrow p \approx 36\%$$

7.

7.1. De acordo com os dados do enunciado, temos que:

- Número de automóveis conduzidos por mulheres: $\frac{80}{4} = 20$
- Número de automóveis conduzidos por homens: $80 - 20 = 60$
- Número de automóveis conduzidos por homens e ocupados apenas pelo condutor: $\frac{60}{3} = 20$

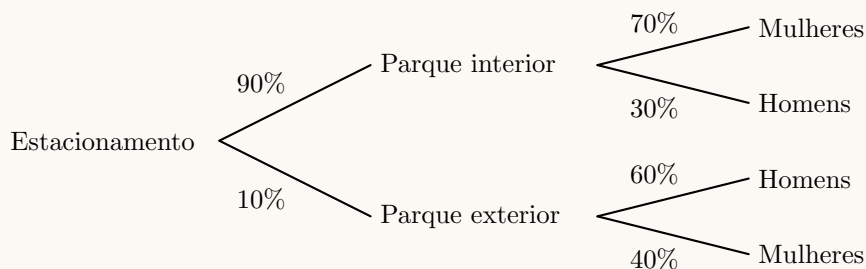


Logo, o número de automóveis conduzidos por mulheres e ocupados apenas pelo condutor é obtido subtraindo ao total de automóveis que são conduzidos apenas pelo condutor (40), os que são conduzidos por homens (20), ou seja:

$$40 - 20 = 20$$

Resposta: **Opção A**

7.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um cliente do CCF que estacionou o seu automóvel num dos parques de estacionamento do centro comercial, e os acontecimentos:

I : "O cliente ter estacionado no parque interior"

H : "O cliente é homem"

Temos, que o valor da probabilidade, arredondado às centésimas, de esse cliente ter estacionado o seu automóvel no parque interior, sabendo-se que é homem, é:

$$P(I|H) = \frac{P(I \cap H)}{P(H)} = \frac{P(I \cap H)}{P(I \cap H) + P(\bar{I} \cap H)} = \frac{0,9 \times 0,3}{0,9 \times 0,3 + 0,1 \times 0,6} = \frac{0,27}{0,33} \approx 0,82$$



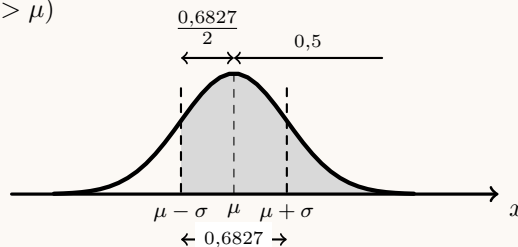
7.3. Considerando a variável X : Tempo de estacionamento dos automóveis nos parques do CCF, temos que $\mu = 2,5$ horas e $\sigma = 30 \text{ min} = 0,5$ horas.

Um período de tempo de 2 horas corresponde a $\mu - \sigma$, isto é, $2,5 - 0,5$ horas, pelo que a probabilidade de um automóvel estacionado durante um período de tempo superior a 2 horas, é:

$$P(X > 2) = P(X > \mu - \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu) + P(X > \mu)$$

Como a distribuição normal é simétrica relativamente ao valor médio, temos que $P(X > \mu) = 0,5$ e ainda que $P(\mu - \sigma < X < \mu) = \frac{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2}$, logo:

$$P(X > 2) \approx \frac{0,6827}{2} + 0,5 \approx 0,84135$$



Assim, dos 20 000 clientes que estacionam o seu automóvel nos parques de estacionamento do CCF, é esperado que uma proporção de 0,84135 tenham estacionado o automóvel por um período superior a 2 horas, ou seja:

$$20\,000 \times 0,84135 = 16827 \text{ clientes}$$

8. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{150}{500} = 0,3$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1,645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left[0,3 - 1,645\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{500}}; 0,3 + 1,645\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{500}} \right] \approx]0,27; 0,33[$$

