

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

2019 - 1.ª Fase

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito, temos:

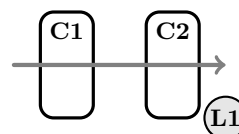
Vídeo	A	B	C
Média do n.º de visualizações por hora	154	221	145
Quota (Q)	$\frac{154+221+145}{15+1} = \frac{520}{16} = 32,5$		
Divisão por Q	$\frac{154}{32,5} \approx 4,7$	$\frac{221}{32,5} = 6,8$	$\frac{145}{32,5} \approx 4,5$
1.ª atribuição (parte inteira do quociente)	4	6	4
Divisão pela parte inteira mais um	$\frac{154}{4+1} = 30,8$	$\frac{221}{6+1} \approx 36,8$	$\frac{145}{4+1} = 29$
2.ª atribuição (maior quociente)	0	1	0
N.º total de anúncios	$4 + 0 = 4$	$6 + 1 = 7$	$4 + 0 = 4$

Assim, dos 15 anúncios são atribuídos 7 anúncios ao vídeo B e os restantes são atribuídos em igual número aos vídeos A e C, ou seja, 4 anúncios para cada um destes dois vídeos.

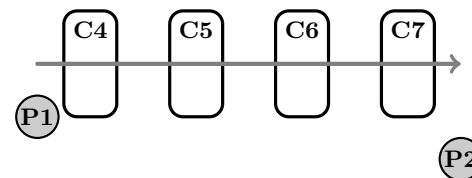


2. Aplicando o método descrito, de acordo com a posição dos marcadores, temos que:

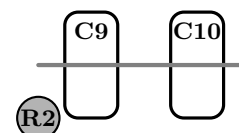
- Percorrendo a linha de caixas, partindo da caixa mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador, observamos que a Laura, que colocou esse marcador, fica responsável por todas as caixas à esquerda do mesmo.



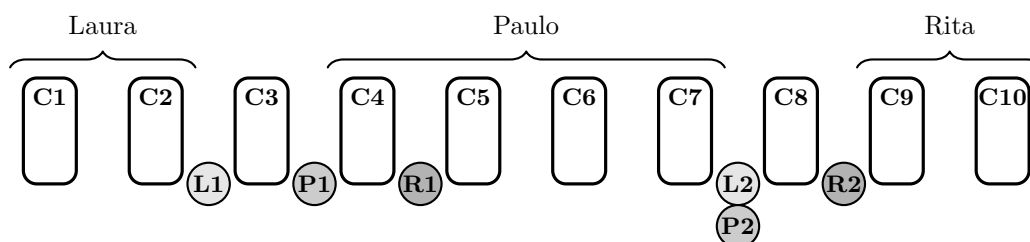
- Percorrendo a linha de caixas, novamente da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois amigos, observamos que o Paulo colocou esse marcador, pelo que fica responsável pelas caixas compreendidas entre os seus primeiro e segundo marcadores.



- O amigo que resta, ou seja, a Rita fica responsável por todas as caixas situadas à direita do seu segundo marcador.



- As caixas C3 e C8 serão distribuídas por sorteio.



Assim, a distribuição das caixas pelos amigos, aplicando o método descrito, é:

- A Laura fica responsável pelas caixas C1 e C2.
- O Paulo fica responsável pelas caixas C4, C5, C6 e C7.
- A Rita fica responsável pelas caixas C9 e C10.
- As caixas C3 e C8 serão distribuídas por sorteio.

3.

3.1. Calculando o custo total de duas encomendas separadas, uma dos dois artigos mais leves e outra do artigo mais pesado, temos:

- Massa dos dois artigos mais leves: $1,9 + 1,5 = 3,4$ kg
- Custo associado a duas encomendas de 3,4 kg e 3,8 kg: $10,80 + 10,80 = 21,16\text{€}$

Calculando o custo total de duas encomendas separadas, uma dos dois artigos mais pesados e outra do artigo mais leve, vem:

- Massa dos dois artigos mais pesados: $3,8 + 1,9 = 5,7$ kg
- Custo associado a duas encomendas de 1,5 kg e 5,7 kg: $5,70 + 14,60 = 20,30\text{€}$

Resposta: **Opção C**



3.2. Calculado os custos totais em cada uma das lojas, para uma entrega até 48 horas, temos:

Loja «Paga Menos»	Loja «Sempre a Poupar»
Equipamento + IVA: $258,22 \times 1,23 \approx 317,61 \text{ €}$	Equipamento + IVA: 347,88 €
Portes de envio (3,4 kg): 10,80 €	Portes de envio : 12 €
Tarifa expresso (48 h): 25 €	Desconto (40 pontos - 4×10 pontos): $4 \times 2 = 8 \text{ €}$
Custo total: $317,61 + 10,80 + 25 = 353,41 \text{ €}$	Custo total: $347,88 + 12 - 8 = 351,88 \text{ €}$

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a proposta da loja «Sempre a Poupar» é a mais vantajosa para o Nuno.

4.

4.1.

4.1.1. Como a média é relativa a 5 anos, temos que:

$$\frac{10\,980 + 12\,000 + a + 15\,000 + 16\,450}{5} = 13\,576 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\,980 + 12\,000 + a + 15\,000 + 16\,450 = 13\,576 \times 5 \Leftrightarrow 54\,430 + a = 67\,880 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 67\,880 - 54\,430 \Leftrightarrow a = 13\,450$$

4.1.2. Observando os valores da figura relativos às percentagens de testes cujo valor de latência foi inferior a 34 ms, podemos verificar que em 2015 foi de 57,5% e em 2017 foi de 54,7%

Considerando os valores da tabela, ou seja, dos testes realizados em 2015 (12 000) e em 2017 (15 000), podemos calcular o número de testes, em cada um destes anos, cujos valores de latência foram inferiores a 34 ms:

- 2015: $12\,000 \times 0,575 = 6900$
- 2017: $15\,000 \times 0,547 = 8205$

Assim, verificamos que relativamente aos testes cujo valor da latência foi inferior a 34 ms, em 2015 representam uma percentagem superior do que em 2017, mas, relativamente ao mesmo período, houve uma redução de 6900 testes nestas condições em 2015 para 8205 em 2017, pelo que a afirmação é falsa.

4.2. Observando as linhas da tabela até ao valor de latência 21 ms, podemos calcular as frequências relativas acumuladas relativa com o objetivo de localizar o 1.º quartil e a mediana:

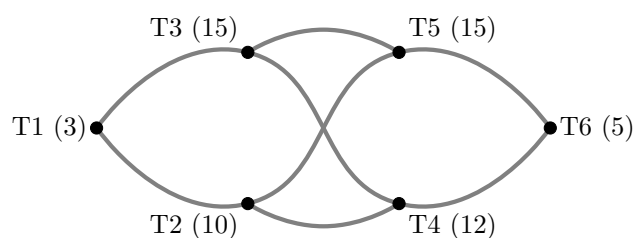
Latência (ms)	N.º de testes	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada	
9	18	18	$\frac{18}{150} = 0,12$	
13	27	$18 + 27 = 45$	$\frac{45}{150} = 0,3$	$Q_1 = 13$
17		51	$\frac{51}{150} = 0,34$	
21	42	$51 + 42 = 93$	$\frac{93}{150} = 0,62$	$\tilde{x} = 21$
...	

Assim, de entre os diagramas de extremos e quartis apresentados, o único compatível com os valores calculados do primeiro quartil e da mediana é o da opção A.

Resposta: **Opção A**



5. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma tarefa e cada aresta representa uma relação de precedência. A ponderação de cada vértice representa o tempo necessário para a execução da tarefa.



Assim podemos verificar que podem ocorrer quatro seqüências de tarefas:

- $T1 \rightarrow T2 \rightarrow T4 \rightarrow T6$, com um tempo associado de $3 + 10 + 12 + 5 = 30$ min
- $T1 \rightarrow T2 \rightarrow T5 \rightarrow T6$, com um tempo associado de $3 + 10 + 15 + 5 = 33$ min
- $T1 \rightarrow T3 \rightarrow T4 \rightarrow T6$, com um tempo associado de $3 + 15 + 12 + 5 = 35$ min
- $T1 \rightarrow T3 \rightarrow T5 \rightarrow T6$, com um tempo associado de $3 + 15 + 15 + 5 = 38$ min

Como, em cada uma das seqüências de tarefas as tarefas não referidas podem decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que compõem a montagem da banca é 38 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da seqüência com maior duração.

6.

- 6.1. Como t representa o tempo, em minutos, e se considera que $t = 0$ é o instante em que o Paulo observou, pela primeira vez, a barra de progresso; um minuto antes de o Paulo observar a barra de progresso pela primeira vez, corresponde a $t = -1$, pelo que a percentagem da descarga do jogo associada é:

$$D(-1) = -200 + 100 \log_{10}(50 \times (-1) + 250) \approx 30,103\%$$

Desta forma, como a descarga completa do jogo, corresponde a transferir 8 gigabytes, a percentagem correspondente, arredondada às décimas, é:

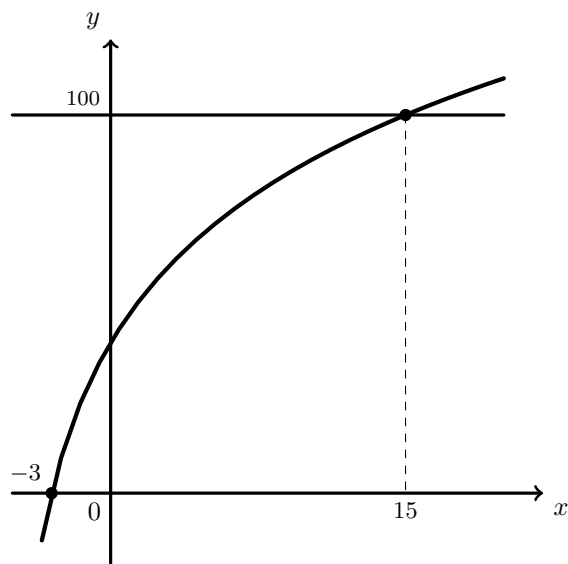
$$8 \times 0,301 \approx 2,4 \text{ gigabytes}$$



- 6.2. Para que a descarga do jogo fique concluída, a percentagem deve atingir os 100%. Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da variação da percentagem de descarga ($y = -200 + 100 \log_{10}(50x + 250)$) e da reta correspondente ao 100% ($y = 100$), numa janela que permita observar a variação da percentagem entre os zero e os 100%, ou seja, $-3,5 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução da percentagem, ou seja, $0 \leq y < 100$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar os valores das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o tempo (número de minutos) após o Paulo ter olhado para a barra de progresso pela primeira vez, ou seja, o ponto de coordenadas (5; 100)

Da mesma forma, determinamos o valor da coordenada em que o gráfico do modelo intersesta o eixo das abcissas, ou que permite determinar o tempo (número de minutos) antes o Paulo ter olhado para a barra de progresso pela primeira vez, ou seja, o ponto de coordenadas (-3; 0)



Assim, temos que antes do Paulo ter olhado pela primeira vez para a barra de progresso passaram 3 minutos e depois de ter olhado passaram mais 15 minutos, até a descarga atingir os 100%, pelo que o tempo que demorou a efetuar-se a descarga do jogo desde que o Paulo deu início ao processo foi:

$$3 + 15 = 18 \text{ minutos}$$

7.

- 7.1. Como 40% das pessoas não clicam em «Gosto», podemos assumir que a percentagem de pessoas que clica em «Gosto» é $100 - 40 = 60\%$

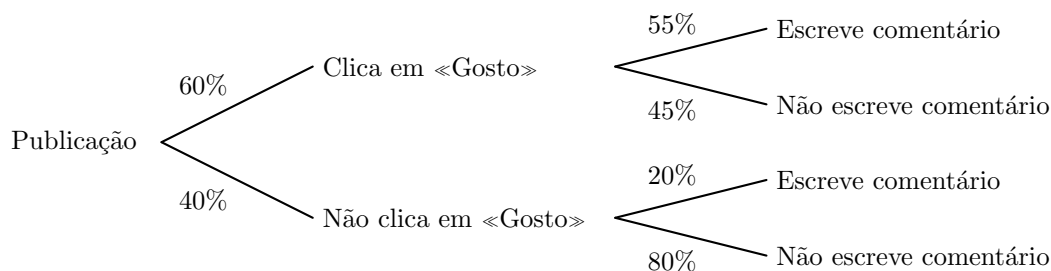
Se, do total das reações aos conteúdos publicados, 24% correspondem a mulheres que clicam em «Gosto», a percentagem de homens com a mesma reação é:

$$60 - 24 = 36\%$$

Resposta: **Opção C**



7.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma pessoa com acesso à rede social, e os acontecimentos:

G : "A pessoa clica em «Gosto»"

T : "A pessoa escreve um comentário"

Temos, que a probabilidade de a pessoa escolhida não clicar em «Gosto», sabendo-se que não escreve um comentário, é:

$$P(\bar{G}|\bar{C}) = \frac{P(\bar{G} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(\bar{G} \cap \bar{C})}{P(G \cap \bar{C}) + P(\bar{G} \cap \bar{C})} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,6 \times 0,45 + 0,4 \times 0,8} = \frac{0,32}{0,59} \approx 0,542$$

Assim, a probabilidade em percentagem, com arredondamento às unidades, é 54%

8. Como os quatro utilizadores podem todos cometer o, e se pretende calcular a probabilidade de que apenas um deles tenha cometido o erro, pode ser o primeiro utilizador a cometer o erro, ou o segundo, ou o terceiro ou ainda o quarto.

Temos ainda que a probabilidade de um deles cometer o erro é de 20%, ou seja, 0,2, pelo que a probabilidade de não cometer o erro é de $1 - 0,2 = 0,8$

Assim, a probabilidade de, selecionando quatro utilizadores ao acaso, apenas um deles cometer erros na transcrição dos caracteres. é:

$$\begin{aligned} & \overbrace{0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8}^{\text{apenas o 1.º erra}} + \overbrace{0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,8}^{\text{apenas o 2.º erra}} + \overbrace{0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,8}^{\text{apenas o 3.º erra}} + \overbrace{0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2}^{\text{apenas o 4.º erra}} = \\ & = 4 \times (0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade solicitada, na forma de percentagem é 40,96%



9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

- O desvio padrão amostral: $s \approx 10$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1,645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \right)$, temos:

$$\left[\bar{x} - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right]$$

E assim, a amplitude do intervalo, em função de n , é:

$$\bar{x} + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right) = \bar{x} + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} - \bar{x} + 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 2 \times 1,645 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{32,9}{\sqrt{n}}$$

Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,658, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

$$\frac{32,9}{\sqrt{n}} = 0,658$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{32,9}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 2500$$

X	Y1
2497	0,65840
2498	0,65826
2499	0,65813
2500	0,658
2501	0,65768
2502	0,65774
2503	0,65761

