Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2020, Época especial)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito, temos:

Lista	X	Y	Z
Número de votos	142	231	425
Divisão por 1	142	231	425
Divisão por 3	$\frac{142}{3} \approx 47{,}3$	$\frac{231}{3} = 77$	$\frac{425}{3} \approx 141{,}7$
Divisão por 5		$\frac{231}{5} = 46{,}2$	$\frac{425}{5} = 85$
Divisão por 7			$\frac{425}{7} \approx 60{,}7$
Divisão por 9			$\frac{425}{9} \approx 47{,}2$

Desta forma, os quocientes obtidos, arredondados às unidades, por ordem decrescente, numa série de 7 termos, é:

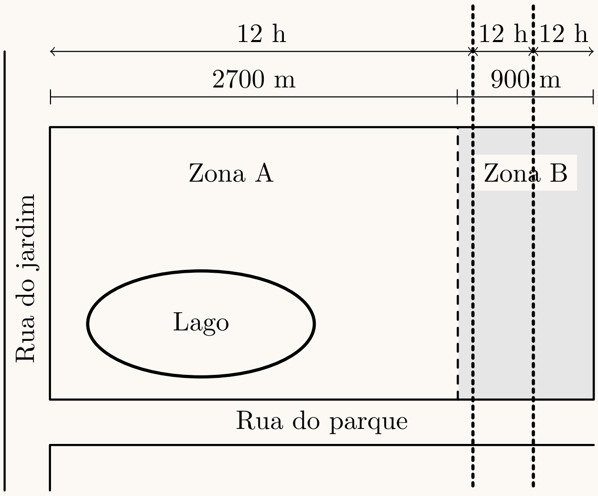
$$425 > 231 > 142 > 142 > 85 > 77 > 61$$

E assim, a direção da AAA será constituída por sete elementos com a seguinte distribuição:

- Lista X: 1 elemento
- Lista Y: 2 elementos
- Lista Z: 4 elementos

2. Como o número de horas necessário para a limpeza semanal da zona B do parque é o triplo do número de horas necessárias para a limpeza da zona A, e no total são necessárias 36 horas, $\frac{1}{4}$ deste tempo é destinado à zona A ($\frac{1}{4} \times 36 = 9$ horas) e $\frac{3}{4}$ deste tempo é destinado à zona B ($\frac{3}{4} \times 36 = 27$ horas).

Como se pretende dividir o parque em três frações retangulares corresponde a um terço do número de horas necessárias para a sua limpeza, ou seja, correspondente a $\frac{1}{3} \times 36 = 12$ horas, então a zona B deverá ser dividida em três partes, duas correspondentes a 12 horas cada e uma terceira para acrescentar 3 horas às 9 horas necessárias para limpar a zona A.



Como a zona B tem 900 metros e demora 27 horas a limpar, cada metro demora $\frac{900}{27}$ horas a limpar, pelo que:

- 3 horas correspondem a $3 \times \frac{900}{27} = 100$ metros
- 12 horas correspondem a $12 \times \frac{900}{27} = 400$ metros

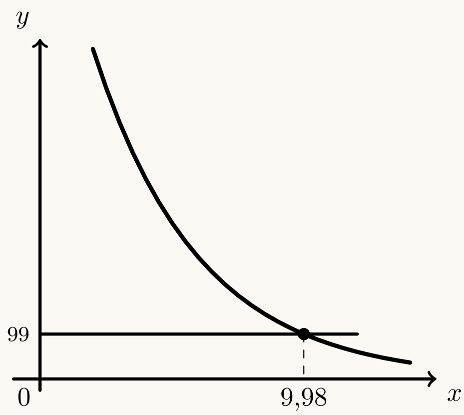
Assim, temos que:

- a Paula deve ficar responsável pela limpeza de toda a zona A e 100 metros da zona B, ou seja, por um comprimento total de 2800 metros a partir da rua do jardim;
- o Rui deve assumir a região central da zona B com um comprimento de 400 metros;
- o Xavier ficará responsável pela região mais afastada da rua do jardim, na zona B, também com um comprimento de 400 metros.

3.

3.1. Para determinar o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, ou seja, o tempo correspondente ao instante em que o número de micro-organismos por cada 100 ml é igual a 99, devemos resolver a equação $c(t) = 99$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 1200e^{-0,25t}$ e a reta $y = 99$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com duas casas decimais) das coordenadas do ponto de interseção: $(9{,}98\,;\,99)$



Assim, temos que o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, é $t \approx 9{,}98$ dias, e calculando o número de peixes existentes no lago, neste instante, temos:

$$p(9{,}98) \approx \frac{5}{1 + e^{-0,21 \times 9,98}} \approx 4{,}45 \text{ milhares}$$

Logo, como 4400 peixes são 4,4 milhares, temos que $p(9{,}98)$ é maior que 4,4, ou seja, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

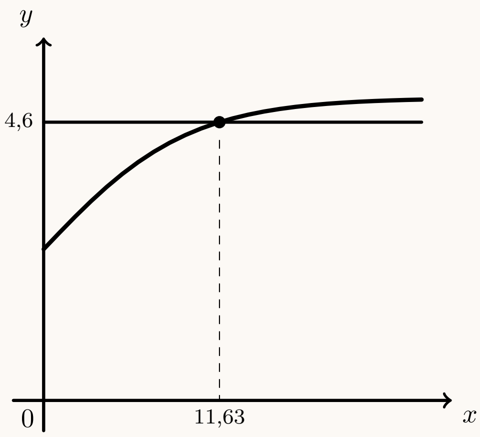
3.2. Observando a expressão algébrica da função p (ou a sua representação gráfica), podemos verificar que o número de peixes no lago tende a estabilizar no valor 5 milhares.

Assim, a introdução da nova espécie de peixes deve acontecer quando a população da espécie existente no lago for de $5000 - 400 = 4600$, ou seja, de 4,6 milhares.

Para determinar o instante em que a população é de 4,6 milhares, devemos resolver a equação $p(t) = 4{,}6$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \dfrac{5}{1+e^{-0{,}21t}}$ e a reta $y = 4{,}6$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(11{,}63\,;\,4{,}6)$

Assim, temos que ao fim de 12 dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, pode-se fazer a introdução de novos peixes (porque foi no decorrer do 11.º dia que a população dos peixes existentes atingiu o valor de 4600).

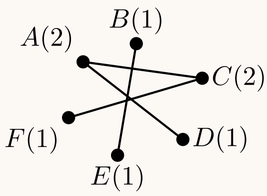


4. Para que seja possível iniciar e terminar um percurso num mesmo canteiro, percorrendo todos os caminhos, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles, tem que ser possível definir um circuto euleriano, o que só acontece se todos os vértices tiverem grau par.

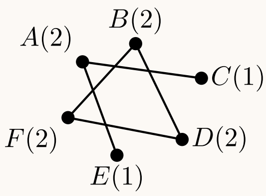
Assim, o único grafo que permite criar um circuito acrescentando uma única aresta, ligando vértices ainda não ligados, é o grafo da opção (C), acrescentando a aresta que liga os vértice A e F, tornado todos os vértices de grau par.

Na opção (A) acrescentar uma única aresta não permite que todos os vértices tenham grau par, na opção (B) acrescentar uma aresta a ligar os vértices de grau ímpar cria dois circuitos independentes e na opção (D) os vértices de grau ímpar já estão ligados por uma aresta.

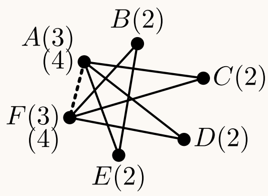
(A)



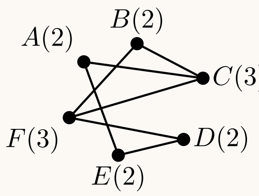
(B)



(C)



(D)



Exame – 2020, Ép. especial

5. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta F-G - comprimento 412 (menor comprimento)

   II - Aresta B-E - comprimento 446

   III - Aresta A-B - comprimento 500

   IV - Aresta A-G - comprimento 502

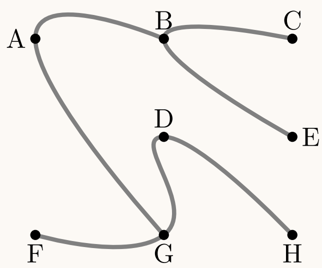
   IV - Aresta B-C - comprimento 505

   V - Aresta D-G - comprimento 721

   (não se consideram as aresta A-C e E-F, porque formam ciclos)

   VI - Aresta D-H - comprimento 952

   (não se consideram as arestas C-G, B-G, A-E e C-E porque formam ciclos)



   Desta forma, a soma dos comprimentos da canalização é:

$$412 + 446 + 500 + 502 + 505 + 721 + 952 = 4038 \text{ m}$$

6. Como a distância entre a escola e a casa do Xavier é 6,5 quilómetros e ele pretende usar a bicicleta para ir e voltar para a escola, a distância diária a percorrer é de:

$$6{,}5 \times 2 = 13 \text{ km}$$

   Como a previsão é a de que faça o trajeto em 22 dias, a distância total é:

$$13 \times 22 = 286 \text{ km}$$

   Assim, o pagamento será calculado em três parcelas:

   - Primeiros 100 km: $5 \times 100 = 500$ cêntimos, ou seja, 5 euros
   - Entre os 100 e os 200 km (pagos a 80%, correspondente a um desconto de 20%): $5 \times 100 \times 0{,}8 = 400$ cêntimos, ou seja, 4 euros
   - 86 km acima dos 100 km (com dois descontos de 20%): $5 \times 86 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 2{,}752$ cêntimos, ou seja, 2,75 euros

   Assim, o valor total a pagar pelo Xavier é:

$$5 + 4 + 2{,}75 = 11{,}75 \text{ euros}$$

7. Como o total de alunos que indicaram o principal motivo para aderir ao programa foi de 1500, ou seja, 100%, e, destes, 645 indicaram o motivos relacionados com o ambiente, a percentagem correspondente (a) pode calculada estabelecendo a proporção, e assim temos que:

$$\frac{1500}{645} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 1645}{1500} \Leftrightarrow a = 43$$

   (como a percentagem de respostas relativas a motivos relacionados com o ambiente nos gráficos das opções A e C é de 40%, podemos rejeitar estas opções).

   Como os motivos indicados relacionados com o ambiente foi de 43% e as respostas relacionadas com outros motivos foram de 4%, então as restantes repostas (poupança e saúde) devem ter uma percentagem total de:

$$100 - 43 - 4 = 53\%$$

   De entre os gráficos das opções B e D, a única que verifica esta condição é a opção D, porque a soma das percentagens relativas às respostas de poupança e saúde´é:

$$35 + 18 = 53\%$$

   Resposta: **Opção D**

8\.

8.1. Como a mediana é 8 e existem um total de 20 registos ($3+4+2+2=11$ rapazes e 9 raparrigas), a mediana é a média d0 10.º e do 11.º primeiro registos na lista ordenada de todos os registos.

Assim, escrevendo os 11 primeiros registos da lista ordenada temos:

$$\underbrace{\overbrace{5\ ;\ 5\ ;\ 5}^{\text{♂}}\ ;\ \overbrace{5\ ;\ 5}^{\text{♀}}\ ;\ \overbrace{6\ ;\ 6\ ;\ 6\ ;\ 6}^{\text{♂}}\ ;\ \overbrace{\ 7\ }^{\text{♀}}}_{10}\ ;\ \underbrace{\overbrace{\ a\ }^{\text{♀}}\ ;\ ...}_{10}$$

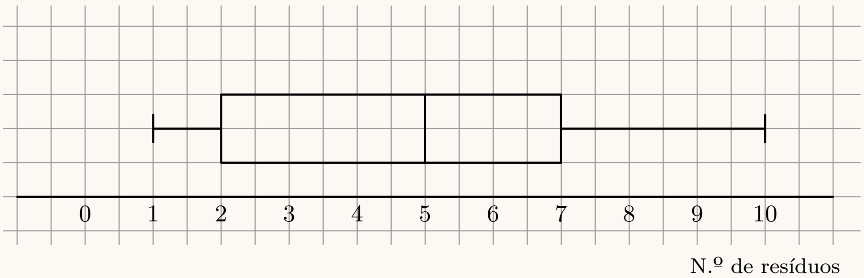
Assim a mediana ($\tilde{x}=8$) é a média aritmética entre 7 e a, ou seja:

$$\frac{7+a}{2}=8 \Leftrightarrow 7+a=16 \Leftrightarrow a=16-7 \Leftrightarrow a=9$$

8.2. Inserindo na calculadora gráfica os valores do número de resíduos numa lista e os valores da frequência absoluta noutra lista, e formatando a calculadora para obter os cálculos estatísticos de uma variável, com dados agrupados, obtemos os seguintes valores para os quartis e para os extremos:

Mínimo	1
1.º quartil	2
Mediana	5
3.º quartil	7
Máximo	10

Assim, representando o diagrama de extremos e quartis relativo a estes dados, temos:



Desta forma podemos concluir que o diagrama apresentado no enunciado não traduz os dados apresentados na tabela, porque o valor do 3.º quartil não é 8, mas sim 7, como se ilustra no diagrama aqui representado.

9\.

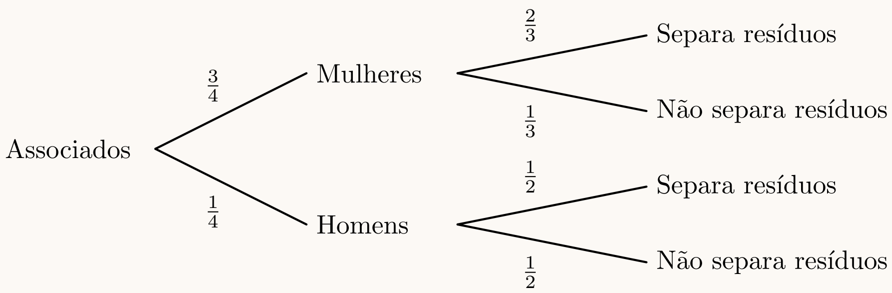
9.1. Como compareceram 80 associados,de ambos os sexos, e três quartos eram mulheres, temos que se pode considerar o agrupamento de $\frac{3}{4}\times 80=60$ mulheres e $\frac{1}{4}\times 80=20$ homens.

Assim, a probabilidade de se selecionar, ao acaso, sucessivamente, dois associados esses associados serem de sexos diferentes corresponde a selecionar um homem e depois uma mulher ou, em alternativa, selecionar uma mulher e depois um homem:

$$\overbrace{\frac{20}{80}\times\frac{60}{79}}^{\text{homem e depois mulher}} + \overbrace{\frac{60}{80}\times\frac{20}{79}}^{\text{mulher e depois homem}} = \frac{1200}{6320}+\frac{1200}{6320}=\frac{30}{79}$$

Resposta: **Opção A**

9.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos associados presentes na conferência, e os acontecimentos:
M:≪O associado é mulher≫
R:≪O associado separa os resíduos≫

Temos, que a probabilidade de o associado escolhido ser mulher, sabendo-se que não faz separação de resíduos. é:

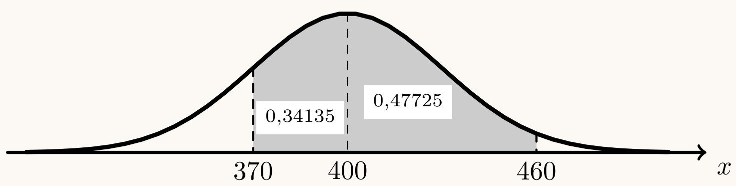
$$P\left(M|\overline{S}\right) = \frac{P\left(M\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{P\left(M\cap\overline{S}\right)}{P\left(M\cap\overline{S}\right)+P\left(\overline{M}\cap\overline{S}\right)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

9.3. Como a variável aleatória X que define a distância, em metros, que esses associados têm de percorrer da sua casa até ao ecoponto mais próximo segue uma distribuição normal, com $\mu = 400$ metros e $\sigma = 30$ metros, temos que a probabilidade de esse associado, para ir da sua casa ao ecoponto, ter de percorrer uma distância entre 370 $(400-30)$ metros e 460 $(400+2\times 30)$ metros, é $P(\mu-\sigma < X < \mu+2\sigma)$.

Assim, temos que:

- $P\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\right) = P\left(370 < X < 430\right) \approx 0{,}6827$
- $P\left(\mu-\sigma < X < \sigma\right) = P\left(370 < X < 400\right) \approx \frac{0{,}6827}{2} \approx 0{,}34135$
- $P\left(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\right) = P\left(340 < X < 460\right) \approx 0{,}9545$
- $P\left(\mu < X < \mu+2\sigma\right) = P\left(400 < X < 460\right) \approx \frac{0{,}9545}{2} \approx 0{,}47725$



(Alternativamente podemos usar o comando da calculadora gráfica para avaliar as probabilidades associadas à função de distribuição cumulativa da normal (NormalCdf ou NormCD), com um valor mínimo de 370 e valor máximo de 4600, $\mu = 400$ e $\sigma = 30$ para obter o valor seguinte).

Logo, a probabilidade solicitada, é:

$$P\left(\mu-\sigma < X < \mu+2\sigma\right) = P\left(400-30 < X < 400+2\times 30\right) \approx 0{,}47725+0{,}34135 \approx 0{,}8186$$

10. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números alugueres efetuados pela Paula, e noutra lista o número de semanas, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média de idas ao cinema e o desvio padrão para a variável≪número de alugueres das BEA efetuados pela Paula, em cada semana≫:

N.º de alugueres	**N.º de semanas**
0	5
1	6
3	16
4	9

$$\overline{x} = 2{,}5 \text{ e } s \approx 1{,}4$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 36$
- A média amostral: $\overline{x} = 2{,}5$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 1{,}4$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left]2{,}5 - 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\ ;\ 2{,}5 + 1{,}645 \times \frac{1{,}4}{\sqrt{36}}\right[\approx]2{,}1; 2{,}9[$$