

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2020, 2.ª fase)
Proposta de resolução



1. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 12 (porque $\frac{23}{2} = 11,5$)
- Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a cidade mais votada foi Veneza com 8 votos)
- Reestruturando novamente a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

| Votos \ Preferências | 8 | 7 | 5 | 3 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| 1ª | Veneza | Florença | Milão | Veneza |
| 2ª | Florença | Milão | Florença | Milão |
| 3ª | Milão | Veneza | Veneza | Florença |

- Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência na tabela reestruturada, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta novamente (a cidade mais votada é, de novo, Veneza com $8 + 3 = 11$ votos)
- Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

| Votos \ Preferências | 8 | 7 | 5 | 3 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| 1ª | Veneza | Florença | Florença | Veneza |
| 2ª | Florença | Veneza | Veneza | Florença |

E assim, a cidade seleccionada pelos amigos para visitar depois de Roma, ou seja a cidade com maioria absoluta de votos ($7 + 5 = 12$, ou seja, mais que $11,5$), é Florença.

2. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

| 1. ^a volta | | | | | |
|-----------------------|--------|-------|------|-------|------|
| Ordem | Carlos | Maria | Elsa | Pedro | Sara |
| Retificou | | | ✓ | ✓ | |
| Parcela atribuída | | | | ✓ | |

(Como na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa, a parcela foi atribuída ao Pedro)

| 2. ^a volta | | | | |
|-----------------------|------|--------|-------|------|
| Ordem | Sara | Carlos | Maria | Elsa |
| Retificou | | | | |
| Parcela atribuída | | | ✓ | |

(Como a Elsa começou a 3.^a volta, a parcela foi atribuída à Maria na 2.^a volta)

| 3. ^a volta | | | |
|-----------------------|------|------|--------|
| Ordem | Elsa | Sara | Carlos |
| Retificou | | | ✓ |
| Parcela atribuída | | | ✓ |

(Como o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta, e nesta volta era o último, a retificação resulta na atribuição ao próprio Carlos)

Assim, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas são:

- 1.^a etapa: Pedro
- 2.^a etapa: Maria
- 3.^a etapa: Carlos



3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

I - Aresta Munique - Salzburgo, peso 140 (menor peso)

(não se considera a aresta Milão - Veneza, porque pertencem ao mesmo país)

II - Aresta Milão - Zurique, peso 280

III - Aresta Munique - Zurique, peso 340

(não se considera a aresta Munique - Viena, porque iria interligar Salzburgo e Viena, pertencentes ao mesmo país)

(não se considera a aresta Salzburgo - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)

(não se considera a aresta Salzburgo - Veneza, porque iria interligar Veneza e Milão, pertencentes ao mesmo país)

(não se considera a aresta Munique - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)

(não se considera a aresta Munique - Veneza, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)

(não se considera a aresta Salzburgo - Milão, porque iria fechar um percurso sem incluir o vértice Paris)

(não se considera a aresta Veneza - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)

(não se considera a aresta Viena - Veneza, porque já foram selecionados vértices destes dois países)

(não se considera a aresta Paris - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)

(não se considera a aresta Viena - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)

(não se considera a aresta Munique - Paris, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)

V - Aresta Paris - Milão - peso 850

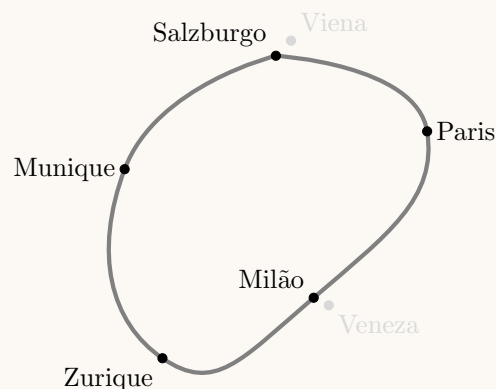
(não se considera a aresta Viena - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)

VI - Aresta Salzburgo - Paris, peso 980

Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim na cidade de Paris, é:

Paris → Milão → Zurique → Munique → Salzburgo → Paris

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).



4. Calculado as despesas totais previstas para cada um dos hotéis, temos:

| Hotel 1 | Hotel 2 |
|--|--|
| Plataforma D: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $215 \times 2 = 430 \text{ €}$ | Plataforma A: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $155 \times 2 = 310 \text{ €}$ |
| Plataforma B: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas, com 10% de desconto, ou seja, 90% do valor): $0,9 \times 225 \times 2 = 405 \text{ €}$ | Custos de transporte (3 dias em zonas de 1 a 3 para 5 pessoas): $47,25 \times 5 = 236,26 \text{ €}$ |
| Custos de transporte: 0 € | |
| Custo total: 405 € | Custo total: $310 + 236,26 = 546,26 \text{ €}$ |

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que, de acordo com os planos dos 5 amigos, a opção mais económica é o Hotel 1 reservado na plataforma B.



5. Como em abril foram ocupados menos 25% dos quartos do que em março, então o número de quartos ocupados em abril foi 75% dos número registrado março.

Assim, como 198 corresponde a 75% do número de quartos ocupados em março (m), então a ocupação de março corresponde a 100%, e assim, estabelecendo a proporção, temos que:

$$\frac{m}{198} = \frac{100}{75} \Leftrightarrow m = \frac{100 \times 198}{75} \Leftrightarrow m = 264$$

Resposta: **Opção B**

6.

- 6.1. Como a Elsa tomou o medicamento às 9 horas (a que corresponde $t = 0$), então as 14 horas e 30 minutos corresponde a um momento em que passaram 5 horas e meia, ou seja, $t = 5,5$

Assim, determinando a temperatura corporal da Elsa, às 14 horas e 30 minutos, de acordo com o modelo, temos:

$$C(5,5) = 26 + 13e^{-0,008 \times 5,5} \approx 38,440 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Calculado a temperatura no momento da toma do medicamento, temos:

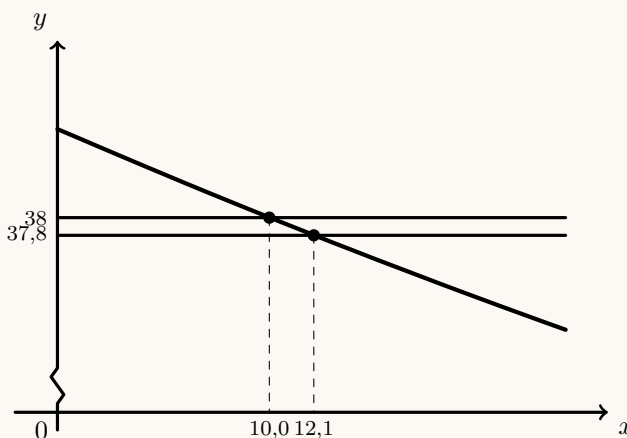
$$C(0) = 26 + 13e^{-0,008 \times 0} = 39 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Como $C(0) - C(5,5) \approx 39 - 38,440 \approx 0,56$, podemos verificar que a diminuição da temperatura neste período de tempo foi superior a $0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ e concluir que não terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

- 6.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da evolução da temperatura corporal da Elsa em função do tempo ($y = 26 + 13e^{-0,008x}$) e das retas correspondentes às temperaturas comunicadas nos dois telefonemas, $38 \text{ } ^\circ\text{C}$ e $37,8 \text{ } ^\circ\text{C}$ ($y = 38$ e $y = 37,8$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 24$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $35 \leq y < 40$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que as temperaturas eram, respetivamente $38 \text{ } ^\circ\text{C}$ e $37,8 \text{ } ^\circ\text{C}$, ou seja, os pontos de coordenadas $(10,0; 38)$ e $(12,1; 37,8)$

Assim, o tempo decorrido entre os dois telefonemas foi de $12,1 - 10,0 \approx 2$ minutos



7.

- 7.1. Relacionando as frequências absoluta simples e absoluta acumulada do tempo de atraso de 5 min, podemos determinar a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso de 4 min, e podemos calcular a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso b , como está indicado na tabela:

| Tempo de atraso (min) | N.º de comboios | Frequência absoluta acumulada |
|-----------------------|-----------------|-------------------------------|
| 0 | | 2 |
| 2 | | 14 |
| 4 | a | $37 - 13 = 24$ |
| 5 | 13 | 37 |
| b | 13 | $37 + 13 = 50$ |
| 15 | | |
| 17 | | 100 |

Depois relacionando as frequências absolutas acumuladas dos tempos 2 e 4 min, podemos determinar o valor de a :

$$\text{Como } 14 + a = 24, \text{ então } a = 24 - 14 = 10$$

Relativamente ao valor de b , como se verificou que existem 50 registos com um valor inferior a b e 50 registos com um valor igual ou superior a 15, então, como o total de registos é par, a mediana resulta da média entre b e 15. Como a mediana é 11 min, podemos determinar o valor de b :

$$\frac{b + 15}{2} = 11 \Leftrightarrow b + 15 = 11 \times 2 \Leftrightarrow b = 22 - 15 \Leftrightarrow b = 7$$

7.2.

- 7.2.1. Como do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações, 13 680 se encontram pendentes, pela leitura do gráfico podemos verificar que este valor corresponde a 45% do total, pelo que, o número total de reclamações é:

$$\frac{t}{13\,680} = \frac{100}{45} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t = 30\,400$$

Como do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2, podemos calcular o número de reclamações da estação E2:

$$30\,400 \times 0,4 = 12\,160$$

Novamente pela observação do gráfico podemos verificar que a percentagem de reclamações pendentes na estação E2 é 75%, pelo que o número correspondente é:

$$12\,160 \times 0,75 = 9\,120$$

- 7.2.2. A probabilidade das duas reclamações se encontrarem no mesmo estado é a soma das probabilidades de ambas estarem resolvidas e de ambas estarem pendentes, ou seja:

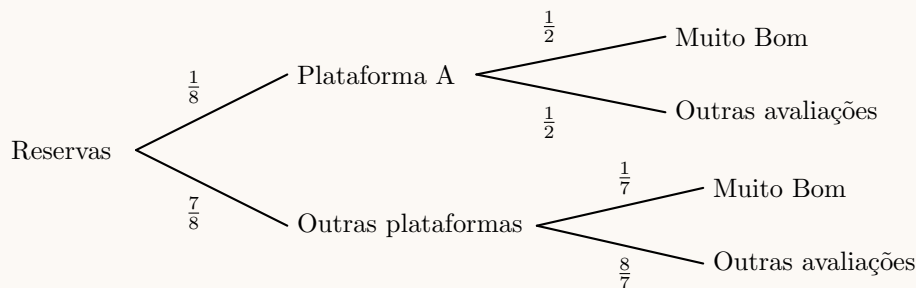
$$0,4 \times 0,25 + 0,6 \times 0,75 = 0,55$$

Resposta: **Opção C**



8.

8.1. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma reserva feita pela Maria, e os acontecimentos:

A : «A reserva foi efetuada através plataforma A»

M : «A reserva corresponde a um alojamento avaliado com Muito Bom»

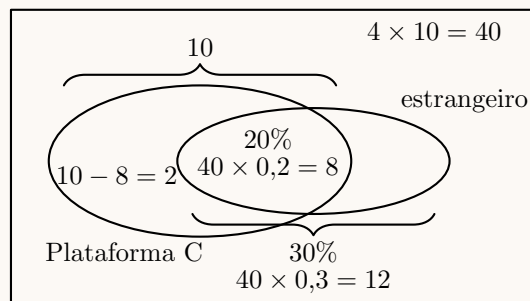
Temos, que a probabilidade de uma reserva ter sido efetuada através da plataforma A, sabendo que corresponde a um alojamento avaliado com Muito Bom, é:

$$\begin{aligned}
 P(A|M) &= \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A \cap M)}{P(M \cap A) + P(M \cap \bar{A})} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

8.2. Como 10% das reservas correspondem ao setor C que representa $\frac{1}{4}$ do total (de acordo com o gráfico circular) então foram realizadas 40 reservas pela Maria.

Como 30% são para alojamentos no estrangeiro, o número de reservas deste tipo é: $40 \times 0,3 = 12$

Como 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro. o número de reservas deste tipo é: $40 \times 0,2 = 8$



Logo podemos concluir que o número de reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos em território nacional é: $10 - 8 = 2$

Desta forma, o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro é:

$$40 - 12 - 2 = 26$$



9. Usando o comando da calculadora gráfica para avaliar as probabilidades associadas à função de distribuição cumulativa da normal (NormalCdf ou NormCD), com um valor mínimo de 0 e valor máximo de 43, em cada uma das opções, temos:

- Para $\mu = 36; \sigma = 3$, $P(0 < X < 43) \approx 0,99$
- Para $\mu = 39; \sigma = 3$, $P(0 < X < 43) \approx 0,91$
- Para $\mu = 36; \sigma = 7$, $P(0 < X < 43) \approx 0,84$
- Para $\mu = 39; \sigma = 7$, $P(0 < X < 43) \approx 0,72$

Ou seja, no contexto da situação descrita, designando por X a variável «duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2», com valor médio 39 e desvio padrão 7, então, temos que $P(X < 43) \approx 0,72$

Resposta: **Opção D**

10. Como a dimensão da amostra das pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019, tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 256$
- A média amostral: $\bar{x} = 5$ horas
- O desvio padrão amostral: $s = 3,9$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio

$\left(\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left[5 - 2,576 \times \frac{3,9}{\sqrt{256}}; 5 + 2,576 \times \frac{3,9}{\sqrt{256}} \right] \approx]4,372; 5,628[$$

Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às centésimas, é:

$$\frac{\bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}} \right)}{2} \approx \frac{5,628 - 4,372}{2} \approx 0,63$$

