Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2020, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito, temos:

   - Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 12 (porque $\frac{23}{2} = 11{,}5$)
   - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a cidade mais votada foi Veneza com 8 votos)
   - Reestruturando novamente a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Votos Preferências	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Milão	Veneza
2ª	Florença	Milão	Florença	Milão
3ª	Milão	Veneza	Veneza	Florença

   - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência na tabela reestruturada, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta novamente (a cidade mais votada é, de novo, Veneza com $8 + 3 = 11$ votos)
   - Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Votos Preferências	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Florença	Veneza
2ª	Florença	Veneza	Veneza	Florença

   E assim, a cidade seleccionada pelos amigos para visitar depois de Roma, ou seja a cidade com maioria absoluta de votos ($7 + 5 = 12$, ou seja, mais que 11,5), é Florença.

2. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

1.ª volta					
Ordem	Carlos	Maria	Elsa	Pedro	Sara
Retificou			✓	✓	
Parcela atribuída				✓	

(Como na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa, a parcela foi atríbuída ao Pedro)

2.ª volta				
Ordem	Sara	Carlos	Maria	Elsa
Retificou				
Parcela atribuída			✓	

(Como a Elsa começou a 3.ª volta, a parcela foi atribuída à Maria na 2.ª volta)

3.ª volta			
Ordem	Elsa	Sara	Carlos
Retificou			✓
Parcela atribuída			✓

(Como o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta, e nesta volta era o último, a retificação resulta na atribuição ao próprio Carlos)

Assim, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas são:

- 1.ª etapa: Pedro
- 2.ª etapa: Maria
- 3.ª etapa: Carlos

3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

   I - Aresta Munique - Salzburgo, peso 140 (menor peso)
   (não se considera a aresta Milão - Veneza, porque pertencem ao mesmo país)

   II - Aresta Milão - Zurique, peso 280

   III - Aresta Munique - Zurique, peso 340
   (não se considera a aresta Munique - Viena, porque iria interligar Salzburgo e Viena, pertencentes ao mesmo país)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Veneza, porque iria interligar Veneza e Milão, pertencentes ao mesmo país)
   (não se considera a aresta Munique - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)
   (não se considera a aresta Munique - Veneza, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Milão, porque iria fechar um percurso sem incluir o vértice Paris)
   (não se considera a aresta Veneza - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Viena - Veneza, porque já foram selecionados vértices destes dois países)
   (não se considera a aresta Paris - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Viena - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Munique - Paris, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)

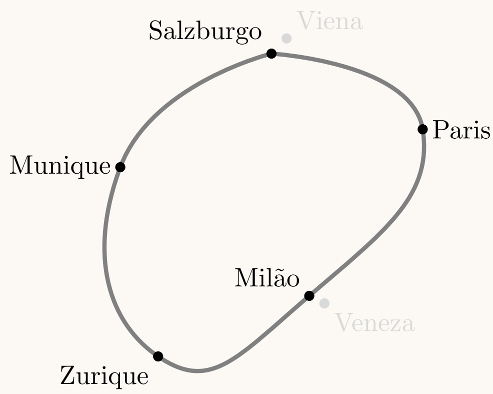
   V - Aresta Paris - Milão - peso 850
   (não se considera a aresta Viena - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)

   VI - Aresta Salzburgo - Paris, peso 980

Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim na cidade de Paris, é:

Paris $\rightarrow$ Milão $\rightarrow$ Zurique $\rightarrow$ Munique $\rightarrow$ Salzburgo $\rightarrow$ Paris

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).



4. Calculado as despesas totais previstas para cada um dos hotéis, temos:

Hotel 1	**Hotel 2**
Plataforma D: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $215 \times 2 = 430$ € Plataforma B: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas, com 10% de desconto, ou seja, 90% do valor): $0{,}9 \times 225 \times 2 = 405$ € Custos de transporte: 0 €	Plataforma A: Custos totais de alojamento (2 noites e 5 pessoas): $155 \times 2 = 310$ € Custos de transporte (3 dias em zonas de 1 a 3 para 5 pessoas): $47{,}25 \times 5 = 236{,}26$ €
Custo total: 405 €	Custo total: $310 + 236{,}26 = 546{,}26$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que, de acordo com os planos dos 5 amigos, a opção mais económica é o Hotel 1 reservado na plataforma B.

5. Como em abril foram ocupados menos 25% dos quartos do que em março, então o número de quartos ocupados em abril foi 75% dos número registado março.

   Assim, como 198 corresponde a 75% do número de quartos ocupados em março (m), então a ocupação de março corresponde a 100%, e assim, estabelecendo a proporção, temos que:

$$\frac{m}{198} = \frac{100}{75} \Leftrightarrow m = \frac{100 \times 198}{75} \Leftrightarrow m = 264$$

   Resposta: **Opção B**

6.

6.1. Como a Elsa tomou o medicamento às 9 horas (a que corresponde $t = 0$), então as 14 horas e 30 minutos corresponde a um momento em que passaram 5 horas e meia, ou seja, $t = 5{,}5$

Assim, determinando a temperatura corporal da Elsa, às 14 horas e 30 minutos, de acordo com o modelo, temos:

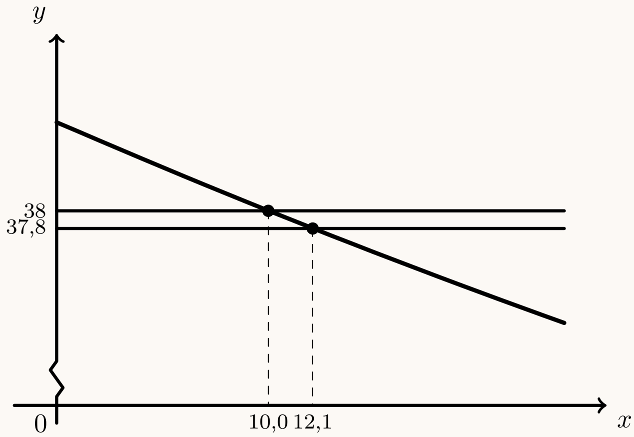
$$C(5{,}5) = 26 + 13e^{-0{,}008\times 5{,}5} \approx 38{,}440\,^\circ\mathrm{C}$$

Calculado a temperatura no momento da toma do medicamento, temos:

$$C(0) = 26 + 13e^{-0{,}008\times 0} = 39\,^\circ\mathrm{C}$$

Como $C(0) - C(5{,}5) \approx 39 - 38{,}440 \approx 0{,}56$, podemos verificar que a diminuição da temperatura neste período de tempo foi superior a $0{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ e concluir que não terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

6.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo da evolução da temperatura corporal da Elsa em função do tempo ($y = 26 + 13e^{-0{,}008x}$) e das retas correspondentes às temperaturas comunicadas nos dois telefonemas, 38 °C e 37,8 °C ($y = 38$ e $y = 37{,}8$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 24$ e também com os valores esperados para a evolução da altura, ou seja, $35 \leq y < 40$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com as duas retas, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que as temperaturas eram, respetivamente 38 °C e 37,8 °C, ou seja, os pontos de coordenadas $(10{,}0\,;\,38)$ e $(12{,}1\,;\,37{,}8)$

Assim, o tempo decorrido entre os dois telefonemas foi de $12{,}1 - 10{,}0 \approx 2$ minutos

7.

7.1. Relacionando as frequências absoluta simples e absoluta acumulada do tempo de atraso de 5 min, podemos determinar a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso de 4 min, e podemos calcular a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso b, como está indicado na tabela:

Tempo de atraso (min)	**N.º de comboios**	**Frequência absoluta acumulada**
0		2
2		14
4	a	$37-13=24$
5	13	37
b	13	$37+13=50$
15		
17		100

Depois relacionando as frequências absolutas acumuladas dos tempos 2 e 4 min, podemos determinar o valor de a:

$$\text{Como } 14+a=24, \text{ então } a=24-14=10$$

Relativamente ao valor de b, como se verificou que existem 50 registos com um valor inferior a b e 50 registos com um valor igual ou superior a 15, então, como o total de registos é par, a mediana resulta da média entre b e 15. Como a mediana é 11 min, podemos determinar o valor de b:

$$\frac{b+15}{2}=11 \Leftrightarrow b+15=11\times 2 \Leftrightarrow b=22-15 \Leftrightarrow b=7$$

7.2.

7.2.1. Como do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações, 13 680 se encontram pendentes, pela leitura do gráfico podemos verificar que este valor corresponde a 45% do total, pelo que, o número total de reclamações é:

$$\frac{t}{13\,680}=\frac{100}{45} \Leftrightarrow t=\frac{100\times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t=\frac{100\times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t=30\,400$$

Como do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2, podemos calcular o número de reclamações da estão E2:

$$30\,400\times 0{,}4=12\,160$$

Novamente pela observação do gráfico podemos verificar que a percentagem de reclamações pendentes na estação E2 é 75%, pelo que o número correspondente é:

$$12\,160\times 0{,}75=9\,120$$

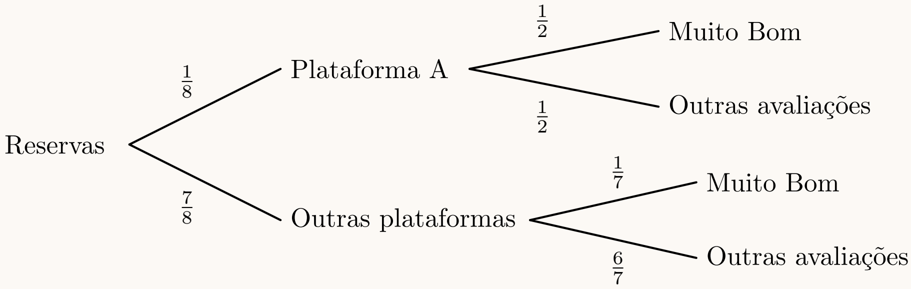
7.2.2. A probabilidade das duas reclamações se encontrarem no mesmo estado é a soma das probabilidades de ambas estarem resolvidas e de ambas estarem pendentes, ou seja:

$$0{,}4\times 0{,}25+0{,}6\times 0{,}75=0{,}55$$

Resposta: **Opção C**

8.

8.1. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma reserva feita pela Maria, e os acontecimentos:
A:≪A reserva foi efetuada através plataforma A≫
M:≪A reserva corresponde a um alojamento avaliado com Muito Bom≫

Temos, que a probabilidade de uma reserva ter sido efetuada através da plataforma A, sabendo que corresponde a um alojamento avaliado com Muito Bom, é:

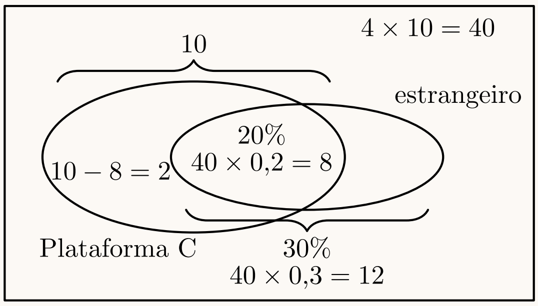
$$P\left(A|M\right) = \frac{P\left(A \cap M\right)}{P\left(M\right)} = \frac{P\left(A \cap M\right)}{P\left(M \cap A\right) + P\left(M \cap \overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$$

8.2. Como 10% das reservas correspondem ao setor C que representa $\frac{1}{4}$ do total (de acordo com o gráfico circular) então foram realizadas 40 reservas pela Maria.

Como 30% são para alojamentos no estrangeiro, o número de reservas deste tipo é: $40 \times 0{,}3 = 12$

Como 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro. o número de reservas deste tipo é: $40 \times 0{,}2 = 8$



Logo podemos concluir que o número de reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos em território nacional é: $10 - 8 = 2$

Desta forma, o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro é:

$$40 - 12 - 2 = 26$$

9. Usando o comando da calculadora gráfica para avaliar as probabilidades associadas à função de distribuição cumulativa da normal (NormalCdf ou NormCD), com um valor mínimo de 0 e valor máximo de 43, em cada uma das opções, temos:

   - Para $\mu = 36; \sigma = 3,\ P(0 < X < 43) \approx 0{,}99$
   - Para $\mu = 39; \sigma = 3,\ P(0 < X < 43) \approx 0{,}91$
   - Para $\mu = 36; \sigma = 7,\ P(0 < X < 43) \approx 0{,}84$
   - Para $\mu = 39; \sigma = 7,\ P(0 < X < 43) \approx 0{,}72$

   Ou seja, no contexto da situação descrita, designando por X a variável ≪duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2≫, com valor médio 39 e desvio padrão 7, então, temos que $P(X < 43) \approx 0{,}72$

   Resposta: **Opção D**

10. Como a dimensão da amostra das pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019, tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

   - A dimensão da amostra: $n = 256$
   - A média amostral: $\overline{x} = 5$ horas
   - O desvio padrão amostral: $s = 3{,}9$ horas
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left] \overline{x} - z\dfrac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z\dfrac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left] 5 - 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}} \, ; \, 5 + 2{,}576 \times \frac{3{,}9}{\sqrt{256}} \right[\approx \left] 4{,}372; 5{,}628 \right[$$

   Assim, a margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, arredondada às centésimas, é:

$$\frac{\overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \right)}{2} \approx \frac{5{,}628 - 4{,}372}{2} \approx 0{,}63$$