Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2021, Época especial)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:

   - Pontuação do António (124 votos na 1.ª preferência, 90 votos na 1.ª preferência e 160 votos na 3.ª preferência):
   $$125 \times 5 + 90 \times 3 + 160 \times 1 = 1055$$
   - Pontuação do Bernardo (160 votos na 1.ª preferência, 125 votos na 1.ª preferência e 90 votos na 3.ª preferência):
   $$160 \times 5 + 125 \times 3 + 90 \times 1 = 1265$$
   - Pontuação da Carla (90 votos na 1.ª preferência, 160 votos na 2.ª preferência e 125 votos na 3.ª preferência):
   $$90 \times 5 + 160 \times 3 + 125 \times 1 = 1055$$

   Como no existem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate, e como a Carla é mais velha que o António, será ela a assumir o cargo de maior importância.

   Assim, a composição da direção da rádio OnOfff, é:

   - Diretor: Bernardo (1265 votos)
   - Vice-diretor: Carla (1055 votos - 29 anos)
   - Adjunto da direção: António (1055 votos - 27 anos)

2. Temos que:

   - O número total de votos que não eram válidos foi 96, correspondentes a 25% dos eleitores que votaram (porque 75% foram considerados válidos), pelo que o número votantes (NV), é:
   $$\frac{NV}{96} = \frac{100}{25} \Leftrightarrow NV = \frac{96 \times 100}{25} \Leftrightarrow NV = 384$$
   - Como existiam 480 e votaram 384, o número de eleitores inscritos que não votou foi $480 - 384 = 96$, pelo que a taxa de abstenção (TA) corresponde á percentagem a que corresponde 96 eleitores que não votaram no total 480 eleitores inscritos, ou seja:
   $$\frac{TA}{100} = \frac{96}{480} \Leftrightarrow TA = \frac{100 \times 96}{480} \Leftrightarrow TA = 20$$

   Resposta: **Opção D**

3. Aplicando o método descrito, nas condições descritas, vem:

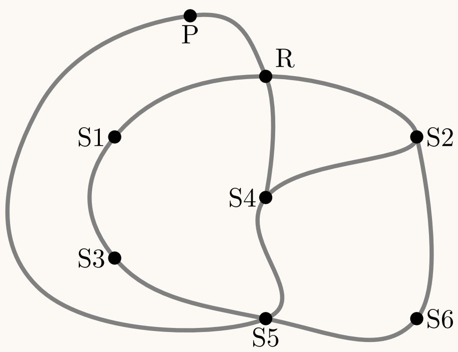
Bens \ Funcionários	Dora	Elsa	Fernando
Bilhete	40 €	34 €	36 €
Camisola	20 €	22 €	26 €
CD	26 €	34 €	28 €
Percentagem do prémio	50%	30%	20%
Valor global	86	90	90
Porção justa	$86 \times \frac{50}{100} = 43$	$90 \times \frac{30}{100} = 27$	$90 \times \frac{20}{100} = 18$
Atribuição dos bens	Bilhete	CD	Camisola
Valor recebido	40	34	26
Excedente apurado	—	$34 - 27 = 7$	$26 - 18 = 8$
Défice apurado	$43 - 40 = 3$	—	—
Dinheiro em excesso	$7 + 8 - 3 = 12$		
Distribuição do excesso	$12 \times \frac{50}{100} = 6$	$12 \times \frac{30}{100} = 3{,}6$	$12 \times \frac{20}{100} = 2{,}4$

Assim, de acordo com as condições indicadas, a parte que cada funcionário deve receber, é:

- Dora: Recebe o bilhete e $3 + 6 = 9$ euros
- Elsa: Recebe o CD e paga $7 - 3{,}6 = 3{,}4$ euros
- Fernando: Recebe a camisola e paga $8 - 2{,}4 = 5{,}6$ euros

4. De acordo com a planta da rádio, considerando o pátio (P), a receção (R) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- Pátio - Grau 2
- Receção - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 3
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 4
- Sala 6 - Grau 2



Para definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, seria necessário definir um circuito de Euler, o que apenas seria possível se todos os vértices tivessem grau par.

Assim, como existem vértices de grau ímpar (os vértices correspondentes às salas 2 e 4) não é possível definir um percurso nas condições indicadas.

5. Calculado o custo de aquisição para cada uma das alternativas, temos:

Alternativa 1	**Alternativa 2**
Valor do equipamento: 4500 € Preço dos portes: (73 kg $= 10 + 6 \times 10 + 3$) $5 + 6 \times 3 + 3 = 26$ €	Valor do equipamento: 4000 € Preço dos portes: $20 \times 1{,}03^{73} \approx 173{,}040$ €
Custo total: $4500 + 26 = 4525$ €	Custo total: $4000 + 173{,}040 = 4173{,}04$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a alternativa monetariamente mais vantajosa,ou seja com um custo total inferior, é a alternativa 2.

6.

6.1. Como existem 6 ouvintes com variação de peso normal (correspondentes aos IMC 19, 19, 20, 20, 20 e 23), então os restantes $20 - 6 = 14$ ouvintes tem um IMC que não pode ser classificado como variação normal.

Assim, a percentagem (p) correspondente é:

$$\frac{p}{100} = \frac{14}{20} \Leftrightarrow p = \frac{14 \times 100}{20} \Leftrightarrow p = 70$$

Resposta: **Opção A**

6.2.

6.2.1. De acordo com os dados do histograma temos que o número de elementos da amostra, n, é:

$$n = 18 + a + 6 + 32 + 16 = a + 72$$

Como os dados estão agrupados em classes, a média é calculada com recurso à identificação da marca de cada classe. Assim, como as marcas de classe são 16, 20, 24, 28 e 32, a média é:

$$\bar{x} = \frac{18 \times 16 + a \times 20 + 6 \times 24 + 32 \times 28 + 16 \times 32}{a + 72} = \frac{20a + 1840}{a + 72}$$

Admitindo que a média é igual a 24, temos que o valor é:

$$24 = \frac{20a + 1840}{a + 72} \Leftrightarrow 24(a + 72) = 20a + 1840 \Leftrightarrow 24a + 1728 = 20a + 1840 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24a - 20a = 1840 - 1728 \Leftrightarrow 4a = 112 \Leftrightarrow a = \frac{112}{4} \Leftrightarrow a = 28$$

6.2.2. Podemos determinar as frequências absolutas simples relativas às chamadas recebidas durante a emissão do programa ≪OnOfff night≫, a partir das frequências absolutas acumuladas - obtidas a partir do histograma - e depois somar as frequências absolutas simples relativas às chamadas recebidas durante a emissão do programa ≪A sua tarde na OnOfff≫ (considerando $a = 26$, de acordo com a tabela seguinte.

Classes	**F. absol. acumulada (≪OnOfff night≫)**	**F. absol. simples (≪OnOfff night≫)**	**F. absol. simples (≪... tarde OnOfff≫)**	**F. absol. simples (Total)**
[14,18[	11	11	18	$11 + 18 = 29$
[18,22[	27	$27 - 11 = 16$	26	$16 + 26 = 42$
[22,26[	41	$41 - 27 = 14$	6	$14 + 6 = 20$
[26,30[	42	$42 - 41 = 1$	32	$1 + 32 = 33$
[30,34[	50	$50 - 42 = 8$	16	$8 + 16 = 24$
Total	—	50	98	$50 + 98 = 148$

7.

7.1. Quando foi inaugurada a rádio OnOfff, ou seja, zero anos após a sua inauguração ($t = 0$), o número aproximado de ouvintes era:

$$R(0) = 7700 + 1471\ln(0 + 1) = 7700 + 1471 \times 0 = 7700$$

Cinco anos após a inauguração ($t = 5$), o número aproximado de ouvintes era:

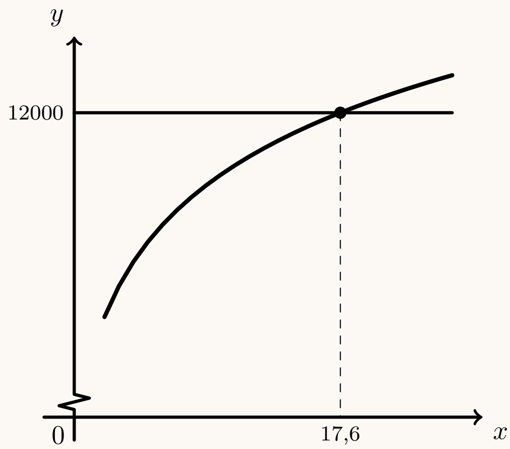
$$R(5) = 7700 + 1471\ln(5 + 1) \approx 10\,336$$

Assim, o valor aproximado do aumento de ouvintes, decorridos cinco anos após a inauguração, é:

$$R(5) - R(0) \approx 10\,336 - 7700 \approx 2636$$

Ou seja, nos primeiros cinco anos o aumento do número de ouvintes foi superior a 2500.

7.2. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 7700 + 1471\ln(x + 1)$ e a reta $y = 12000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: (17,6 ; 12000)



Assim, temos que o número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000, 17 anos após a inauguração da rádio, ou seja durante o ano de 2017.

Como a atualização dos equipamentos ocorreu no início do ano seguinte, esta ocorreu em 2018.

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos funcionários da rádio OnOff, e os acontecimentos:
C:≪O funcionário trabalha a partir de casa≫
D:≪O funcionário colabora em programas emitidos diariamente≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(C\right) = 0{,}8$, $P\left(D|C\right) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = 0{,}05$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P\left(C\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{C} \cap D\right) = P\left(\overline{C}\right) - P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$
- $P\left(C \cap D\right) = P\left(D|C\right) \times P\left(C\right) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$

	C	$\overline{C}$	
D	0,4	0,15	0,55
$\overline{D}$		0,05	
	0,8	0,2	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de o funcionário selecionado colaborar em programas emitidos diariamente, é:

$$P\left(D\right) = P\left(C \cap D\right) + P\left(\overline{C} \cap D\right) = 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}55$$

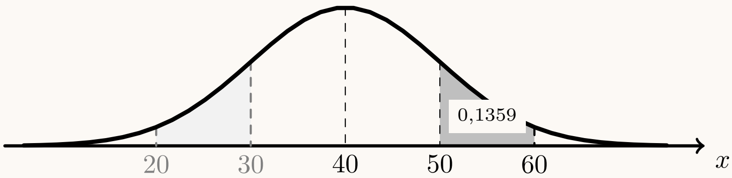
9. Considerando a variável aleatória X que define o tempo diário, em minutos, durante o qual um ouvinte escolhido ao acaso, acompanha a emissão da rádio OnOfff, e que esta segue uma distribuição normal, com $\mu = 40$ minutos e $\sigma = 10$ minutos, temos que a probabilidade de num dia o ouvinte escolhido ao acaso, acompanhar a emissão da rádio OnOfff entre 50 minutos $(\mu + \sigma)$ e uma hora (60 minutos - $\mu + 2\sigma$), é $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

Assim, temos que:

- $P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = P\left(30 < X < 50\right) \approx 0{,}6827$
- $P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(20 < X < 60\right) \approx 0{,}9545$
- $P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) - P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = P\left(20 < X < 30\right) + P\left(50 < X < 60\right) \approx$

$$\approx 0{,}9545 - 0{,}6827 \approx 0{,}2718$$

- $P\left(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(50 < X < 60\right) \approx \dfrac{0{,}2718}{2} \approx 0{,}1359$



(Alternativamente podemos usar o comando da calculadora gráfica para avaliar as probabilidades associadas à função de distribuição cumulativa da normal (NormalCdf ou NormCD), com um valor mínimo de 50 e valor máximo de 60, $\mu = 40$ e $\sigma = 10$ para obter o valor seguinte).

Logo, a probabilidade solicitada, na forma de dízima, arredondado às milésimas, é:

$$P\left(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(40 + 10 < X < 40 + 2 \times 10\right) \approx 0{,}136$$

10.

10.1. A margem de erro do intervalo do intervalo de confiança é metade da amplitude do intervalo, ou seja:

$$\frac{14{,}56 - 13{,}86}{2} = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32$$

Resposta: **Opção D**

10.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 100$
- A média amostral: $\overline{x} = 12$
- O desvio padrão amostral: $s = 2,1$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1,645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \,, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left]12 - 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \,;\, 12 + 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}}\right[\approx]11{,}7; 12{,}3[$$