Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais **(2021, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

- Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow VA = 9375$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

Lista	**A**	**B**	**C**	**D**
Votos	1505	2295	1750	1650
N.º total de votos	$1505 + 2295 + 1750 + 1650 = 7200$			
Divisor padrão	$\frac{7200}{24} = 300$			
Quota inferior	$\frac{1505}{300} \approx 5$	$\frac{2295}{300} \approx 7$	$\frac{1750}{300} \approx 5$	$\frac{1650}{300} \approx 5$
Soma das quotas inferiores	$5 + 7 + 5 + 5 = 22$ (inferior a 24)			
Divisor modificado	$300 - 10 = 290$			
Quota inferior modificada	$\frac{1505}{290} \approx 5$	$\frac{2295}{290} \approx 7$	$\frac{1750}{290} \approx 6$	$\frac{1650}{290} \approx 5$
Soma das quotas inferiores modificadas	$5 + 7 + 6 + 5 = 23$ (inferior a 24)			
Divisor modificado	$300 - 2 \times 10 = 280$			
Quota inferior modificada	$\frac{1505}{280} \approx 5$	$\frac{2295}{280} \approx 8$	$\frac{1750}{280} \approx 6$	$\frac{1650}{280} \approx 5$
Soma das quotas inferiores modificadas	$5 + 8 + 6 + 5 = 24$			

Assim, o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da Para-Pagar, recorrendo ao método descrito, é:

- 5 elementos da lista A,
- 8 elementos da lista B,
- 6 elementos da lista C,
- 5 elementos da lista D.

2. Aplicando o método descrito, vem:

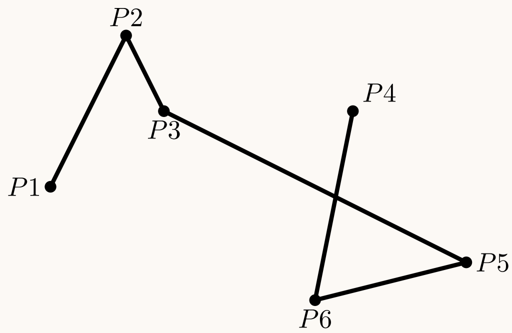
Telemóveis \ **Trabalhadores**	**Mariana**	**Pedro**	**Tiago**
A	370	330	290
B	480	500	480
C	230	205	190
Valor global atribuído	1080	1035	960
Valor considerado justo	$\frac{1080}{3} = 360$	$\frac{1035}{3} = 345$	$\frac{960}{3} = 320$
Atribuição dos telemóveis	A+C	B	—
Valor monetário recebido	$370 + 230 = 600$	500	0
Excedente disponibilizado	$600 - 360 = 240$	$500 - 345 = 155$	—
Valor em falta recebido	—	—	320
Montante restante	$240 + 155 - 320 = 75$		
Divisão final	$\frac{75}{3} = 25$		

Assim, de acordo com o método descrito, a parte que cada trabalhador deve receber é:

- Mariana: Recebe os telemóveis A e C e paga e $240 - 25 = 215$ euros
- Pedro: Recebe o telemóvel B e paga e $155 - 25 = 130$ euros
- Tiago: Recebe $320 + 25 = 345$ euros

3. Pela observação do grafo e de acordo com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação dos postos e grafo da figura:

I - Posto $P4$ - Posto inicial
II - Posto $P6$ - distância 180
III - Posto $P5$ - distância 185
IV - Posto $P3$ - distância 355
IV - Posto $P2$ - distância 95
V - Posto $P1$ - distância 185



Desta forma, a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar, é:

$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$

4.

4.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma e calcular a frequência absoluta simples (a partir da frequência absoluta acumulada, por subtrações sucessivas), como se apresenta na tabela seguinte:

Classes	Marca de classe	Frequência absoluta acumulada	Frequência absoluta simples
[18,28[	$\frac{18+28}{2}=23$	15	15
[28,38[	$\frac{28+38}{2}=33$	75	$75-15=60$
[38,48[	$\frac{38+48}{2}=43$	120	$120-75=45$
[48,58[	$\frac{48+58}{2}=53$	140	$140-120=20$
[58,68[	$\frac{58+68}{2}=63$	150	$150-140=10$

Assim, introduzindo na calculadora gráficas listas correspondentes às marca de classe e às frequências absolutas simples e calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média das idades dos 150 funcionários, com arredondamento às unidades:

$$\overline{x} \approx 40$$

4.2. A amplitude do ângulo ao centro de cada setor do gráfico circular é diretamente proporcional à frequência absoluta da classe que representa. Assim, como a soma das amplitudes é 360° e a soma das fequências absolutas é 150, temos que a amplitude α do sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe $[18,28[$, cuja frequência absoluta é 15, temos que:

$$\frac{\alpha}{360}=\frac{15}{150} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \alpha=\frac{360}{10} \Leftrightarrow \alpha=36^\circ$$

Resposta: **Opção D**

4.3. Considerando as frequências absolutas relativas aos 150 funionários de Lisboa e Vale do Tejo (identificados no item 4.2.) e as relativas 100 funcionários do Algarve, podemos determinar a frequência absoluta simples dos 250 funcionários, depois a frequência relativa simples e finalmente a frequência relativa acumulada, de acordo com a tabela seguinte.

Classes	Lisboa VT	Algarve	Frequência absoluta simples (total)	Frequência relativa simples (total)	Frequência relativa acumulada (total)
[18,28[	15	30	$15+30=45$	$\frac{45}{250}=0{,}18$	0,18
[28,38[	60	25	$60+25=85$	$\frac{85}{250}=0{,}34$	$0{,}18+0{,}34=0{,}52$
[38,48[	45	30	$45+30=75$	$\frac{75}{250}=0{,}3$	$0{,}52+0{,}3=0{,}82$
[48,58[	20	10	$20+10=30$	$\frac{30}{250}=0{,}12$	$0{,}82+0{,}12=0{,}94$
[58,68[	10	5	$10+5=15$	$\frac{15}{250}=0{,}06$	$0{,}94+0{,}06=1$
Total	150	100	$150+100=250$	—	—

5. Identificando os valores de que depende o cálculo de P, temos:

- $VF = 500$
- $i = 0{,}03$
- n entre 2 e 12

Assim, temos que o valor de P, para cada valor de n, é dado por $P = \dfrac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^n}{(1+0{,}03)^n - 1}$

Desta forma, determinando os valores de P, ou seja, da prestação mensal para cada valor de n, e verificando qual é o menor valor de n a que corresponde um valor de P inferior a 75, temos:

n	2	...	7	8
P	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^2}{(1+0{,}03)^2 - 1} \approx 261$	...	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^7}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 80$	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^8}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 71$

Assim concluímos que $n = 8$, ou seja, o Tiago deve optar por fracionar o pagamento em 8 prestações mensais de 71 euros, e assim o valor total a pagar pelo telemóvel, é:

$$8 \times 71 = 568 \text{ euros}$$

6.

6.1. Como o número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo, no início de 2016 ($t = 0$), o número de utilizadores era:

$$A(0) = \frac{20}{1 + e^{-0{,}2 \times 0}} = 10 \text{ milhares}$$

Como o número de utilizadores, em Portugal continental, era 50 000, ou seja, 50 milhares, e o número de utilizadores que não pertenciam à região do Alentejo, correspondente a $50 - 10 = 40$ milhares, então calculando a percentagem, p, correspondente aos utilizadores que não não pertenciam à região do Alentejo, temos:

$$\frac{p}{40} = \frac{100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = 80$$

Ou seja, no início de 2016 a percentagem de utilizadores da aplicação que não pertenciam à região do Alentejo era 80%.

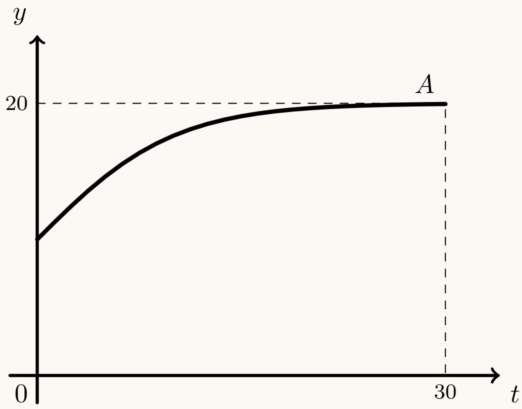
6.2. Atendendo aos valores indicados no mapa, a percentagem de utilizadores da aplicação no Alentejo, numa perspetiva de longo prazo, é:

$$100 - 20 - 25 - 30 - 15 = 10$$

Como o número de utilizadores da aplicação em Portugal continental, se estima em 200 000, o número de utilizadores estimado na região do Alentejo, ou seja 10% deste valor, corresponde a:

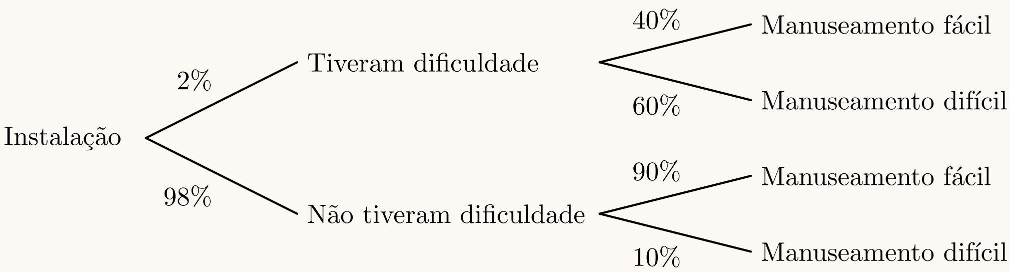
$$200\,000 \times 0{,}1 = 20\,000$$

Representando o modelo apresentado para a região Alentejo, num horizonte temporal alargado, por exemplo de 30 anos, ou seja até 2046 ou seja, $0 \leq x \leq 30$, obtemos o gráfico que se encontra reproduzido na figura ao lado.



Determinando o valor aproximado de utilizadores esperados no ano 2046, ou seja, numa perspetiva de longo prazo, podemos verificar que o número de utilizadores no Alentejo tende a estabilizar em 20 milhares, ou seja, um valor aproximadamente igual ao valor calculado a partir dos dados do mapa, pelo que se pode considerar o modelo adequado.

7. Como a ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015, no início de 2108 tinham tinham decorrido 3 anos do seu lançamento ($t = 3$), pelo que, de acordo com o modelo, podemos verificar que neste período (início de 2018) 2% dos novos utilizadores tiveram dificuldades na instalação da aplicação. Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018, e os acontecimentos:
D: "O utilizador teve dificuldade na instalação"
F: "O utilizador considerou o aplicação de fácil manuseamento"

Temos, que o valor da probabilidade, na forma de dízima, de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento, é:

$$P\left(\overline{F}\right) = P\left(D \cap \overline{F}\right) + P\left(\overline{D} \cap \overline{F}\right) = 0{,}02 \times 0{,}6 + 0{,}98 \times 0{,}1 = 0{,}11$$

8. De acordo com as condições de que o Tiago se recordava, existem 6 palavras-passe distintas:

851 T G — T 851 G — T G 851

851 G T — G 851 T — G T 851

Logo a probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é $\frac{1}{6}$

Resposta: **Opção A**

9. Considerando que a probabilidade de um utilizador cometer um erro na escrita da palavra passe é de 10%, ou seja $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, a probabilidade de não cometer erros é de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Assim, selecionando três utilizadores ao acaso, a probabilidade, na forma de dízima, de apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe, é:

$$\overbrace{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 1.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 2.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}}^{\text{apenas o 3.º não era}} = 3 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{27}{1000} = 0{,}027$$

10. Observando a tabela podemos verificar que dos 625 utilizadores da ParaPagarApp, o número dos que na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros, é:

$$81 + 44 = 125$$

Assim, como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 625$
- A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{125}{625} = 0{,}2$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]0{,}2 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\ ;\ 0{,}2 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\right[\approx \left]0{,}17; 0{,}23\right[$$