

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2021, 1.ª fase)
Proposta de resolução



1.

1.1. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

- Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow NA = 9375$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

| Lista | A | B | C | D |
|--|--------------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Votos | 1505 | 2295 | 1750 | 1650 |
| N.º total de votos | $1505 + 2295 + 1750 + 1650 = 7200$ | | | |
| Divisor padrão | $\frac{7200}{24} = 300$ | | | |
| Quota inferior | $\frac{1505}{300} \approx 5$ | $\frac{2295}{300} \approx 7$ | $\frac{1750}{300} \approx 5$ | $\frac{1650}{300} \approx 5$ |
| Soma das quotas inferiores | $5 + 7 + 5 + 5 = 22$ (inferior a 24) | | | |
| Divisor modificado | $300 - 10 = 290$ | | | |
| Quota inferior modificada | $\frac{1505}{290} \approx 5$ | $\frac{2295}{290} \approx 7$ | $\frac{1750}{290} \approx 6$ | $\frac{1650}{290} \approx 5$ |
| Soma das quotas inferiores modificadas | $5 + 7 + 6 + 5 = 23$ (inferior a 24) | | | |
| Divisor modificado | $300 - 2 \times 10 = 280$ | | | |
| Quota inferior modificada | $\frac{1505}{280} \approx 5$ | $\frac{2295}{280} \approx 8$ | $\frac{1750}{280} \approx 6$ | $\frac{1650}{280} \approx 5$ |
| Soma das quotas inferiores modificadas | $5 + 8 + 6 + 5 = 24$ | | | |

Assim, o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da Parapagar, recorrendo ao método descrito, é:

- 5 elementos da lista A,
- 8 elementos da lista B,
- 6 elementos da lista C,
- 5 elementos da lista D.

2. Aplicando o método descrito, vem:

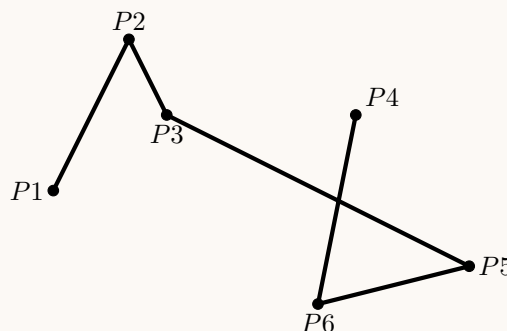
| Telemóveis | Trabalhadores | | |
|---------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| | Mariana | Pedro | Tiago |
| A | 370 | 330 | 290 |
| B | 480 | 500 | 480 |
| C | 230 | 205 | 190 |
| Valor global atribuído | 1080 | 1035 | 960 |
| Valor considerado justo | $\frac{1080}{3} = 360$ | $\frac{1035}{3} = 345$ | $\frac{960}{3} = 320$ |
| Atribuição dos telemóveis | A+C | B | — |
| Valor monetário recebido | $370 + 230 = 600$ | 500 | 0 |
| Excedente disponibilizado | $600 - 360 = 240$ | $500 - 345 = 155$ | — |
| Valor em falta recebido | — | — | 320 |
| Montante restante | $240 + 155 - 320 = 75$ | | |
| Divisão final | $\frac{75}{3} = 25$ | | |

Assim, de acordo com o método descrito, a parte que cada trabalhador deve receber é:

- Mariana: Recebe os telemóveis A e C e paga e $240 - 25 = 215$ euros
- Pedro: Recebe o telemóvel B e paga e $155 - 25 = 130$ euros
- Tiago: Recebe $320 + 25 = 345$ euros

3. Pela observação do grafo e de acordo com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação dos postos e grafo da figura:

- I - Posto P_4 - Posto inicial
- II - Posto P_6 - distância 180
- III - Posto P_5 - distância 185
- IV - Posto P_3 - distância 355
- IV - Posto P_2 - distância 95
- V - Posto P_1 - distância 185



Desta forma, a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar, é:

$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$



4.

- 4.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma e calcular a frequência absoluta simples (a partir da frequência absoluta acumulada, por subtrações sucessivas), como se apresenta na tabela seguinte:

| Classes | Marca de classe | Frequência absoluta acumulada | Frequência absoluta simples |
|---------|------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| [18,28[| $\frac{18+28}{2} = 23$ | 15 | 15 |
| [28,38[| $\frac{28+38}{2} = 33$ | 75 | $75 - 15 = 60$ |
| [38,48[| $\frac{38+48}{2} = 43$ | 120 | $120 - 75 = 45$ |
| [48,58[| $\frac{48+58}{2} = 53$ | 140 | $140 - 120 = 20$ |
| [58,68[| $\frac{58+68}{2} = 63$ | 150 | $150 - 140 = 10$ |

Assim, introduzindo na calculadora gráficas listas correspondentes às marca de classe e às frequências absolutas simples e calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média das idades dos 150 funcionários, com arredondamento às unidades:

$$\bar{x} \approx 40$$

- 4.2. A amplitude do ângulo ao centro de cada setor do gráfico circular é diretamente proporcional à frequência absoluta da classe que representa. Assim, como a soma das amplitudes é 360° e a soma das frequências absolutas é 150, temos que a amplitude α do sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe [18,28[, cuja frequência absoluta é 15, temos que:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{15}{150} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360}{10} \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ$$

Resposta: **Opção D**

- 4.3. Considerando as frequências absolutas relativas aos 150 funcionários de Lisboa e Vale do Tejo (identificados no item 4.2.) e as relativas 100 funcionários do Algarve, podemos determinar a frequência absoluta simples dos 250 funcionários, depois a frequência relativa simples e finalmente a frequência relativa acumulada, de acordo com a tabela seguinte.

| Classes | Lisboa VT | Algarve | Frequência absoluta simples (total) | Frequência relativa simples (total) | Frequência relativa acumulada (total) |
|---------|-----------|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| [18,28[| 15 | 30 | $15 + 30 = 45$ | $\frac{45}{250} = 0,18$ | 0,18 |
| [28,38[| 60 | 25 | $60 + 25 = 85$ | $\frac{85}{250} = 0,34$ | $0,18 + 0,34 = 0,52$ |
| [38,48[| 45 | 30 | $45 + 30 = 75$ | $\frac{75}{250} = 0,3$ | $0,52 + 0,3 = 0,82$ |
| [48,58[| 20 | 10 | $20 + 10 = 30$ | $\frac{30}{250} = 0,12$ | $0,82 + 0,12 = 0,94$ |
| [58,68[| 10 | 5 | $10 + 5 = 15$ | $\frac{15}{250} = 0,06$ | $0,94 + 0,06 = 1$ |
| Total | 150 | 100 | $150 + 100 = 250$ | — | — |



5. Identificando os valores de que depende o cálculo de P , temos:

- $VF = 500$
- $i = 0,03$
- n entre 2 e 12

Assim, temos que o valor de P , para cada valor de n , é dado por $P = \frac{500 \times 0,03 \times (1 + 0,03)^n}{(1 + 0,03)^n - 1}$

Desta forma, determinando os valores de P , ou seja, da prestação mensal para cada valor de n , e verificando qual é o menor valor de n a que corresponde um valor de P inferior a 75, temos:

| | | | | |
|-----|--|-----|---|---|
| n | 2 | ... | 7 | 8 |
| P | $\frac{500 \times 0,03 \times (1 + 0,03)^2}{(1 + 0,03)^2 - 1} \approx 261$ | ... | $\frac{500 \times 0,03 \times (1 + 0,03)^7}{(1 + 0,03)^8 - 1} \approx 80$ | $\frac{500 \times 0,03 \times (1 + 0,03)^8}{(1 + 0,03)^8 - 1} \approx 71$ |

Assim concluímos que $n = 8$, ou seja, o Tiago deve optar por fracionar o pagamento em 8 prestações mensais de 71 euros, e assim o valor total a pagar pelo telemóvel, é:

$$8 \times 71 = 568 \text{ euros}$$

6.

6.1. Como o número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo, no início de 2016 ($t = 0$), o número de utilizadores era:

$$A(0) = \frac{20}{1 + e^{-0,2 \times 0}} = 10 \text{ milhares}$$

Como o número de utilizadores, em Portugal continental, era 50 000, ou seja, 50 milhares, e o número de utilizadores que não pertenciam à região do Alentejo, correspondente a $50 - 10 = 40$ milhares, então calculando a percentagem, p , correspondente aos utilizadores que não pertenciam à região do Alentejo, temos:

$$\frac{p}{40} = \frac{100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = 80$$

Ou seja, no início de 2016 a percentagem de utilizadores da aplicação que não pertenciam à região do Alentejo era 80%.

6.2. Atendendo aos valores indicados no mapa, a percentagem de utilizadores da aplicação no Alentejo, numa perspetiva de longo prazo, é:

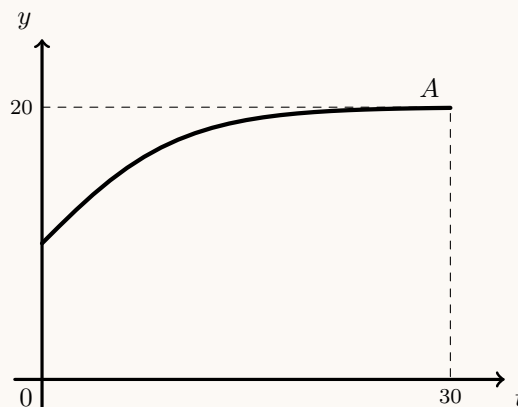
$$100 - 20 - 25 - 30 - 15 = 10$$

Como o número de utilizadores da aplicação em Portugal continental, se estima em 200 000, o número de utilizadores estimado na região do Alentejo, ou seja 10% deste valor, corresponde a:

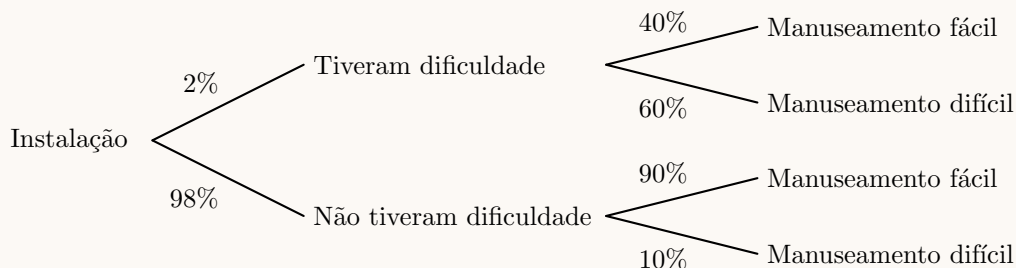
$$200\,000 \times 0,1 = 20\,000$$

Representando o modelo apresentado para a região Alentejo, num horizonte temporal alargado, por exemplo de 30 anos, ou seja até 2046 ou seja, $0 \leq x \leq 30$, obtemos o gráfico que se encontra reproduzido na figura ao lado.

Determinando o valor aproximado de utilizadores esperados no ano 2046, ou seja, numa perspetiva de longo prazo, podemos verificar que o número de utilizadores no Alentejo tende a estabilizar em 20 milhares, ou seja, um valor aproximadamente igual ao valor calculado a partir dos dados do mapa, pelo que se pode considerar o modelo adequado.



7. Como a ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015, no início de 2018 tinham decorrido 3 anos do seu lançamento ($t = 3$), pelo que, de acordo com o modelo, podemos verificar que neste período (início de 2018) 2% dos novos utilizadores tiveram dificuldades na instalação da aplicação. Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018, e os acontecimentos:

D : "O utilizador teve dificuldade na instalação"

F : "O utilizador considerou o aplicação de fácil manuseamento"

Temos, que o valor da probabilidade, na forma de dízima, de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento, é:

$$P(\bar{F}) = P(D \cap \bar{F}) + P(\bar{D} \cap \bar{F}) = 0,02 \times 0,6 + 0,98 \times 0,1 = 0,11$$

8. De acordo com as condições de que o Tiago se recordava, existem 6 palavras-passe distintas:

851 T G — T 851 G — T G 851

851 G T — G 851 T — G T 851

Logo a probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é $\frac{1}{6}$

Resposta: **Opção A**

9. Considerando que a probabilidade de um utilizador cometer um erro na escrita da palavra passe é de 10%, ou seja $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, a probabilidade de não cometer erros é de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Assim, selecionando três utilizadores ao acaso, a probabilidade, na forma de dízima, de apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe, é:

$$\overbrace{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 1.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 2.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}}^{\text{apenas o 3.º não erra}} = 3 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{27}{1000} = 0,027$$



10. Observando a tabela podemos verificar que dos 625 utilizadores da ParaPagarApp, o número dos que na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros, é:

$$81 + 44 = 125$$

Assim, como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 625$
- A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \frac{125}{625} = 0,2$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1,645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left[0,2 - 1,645\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{625}}; 0,2 + 1,645\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{625}} \right] \approx]0,17; 0,23[$$

