Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2022, Época especial)

Proposta de resolução

1.

1.1. Como os 268 convites destinados ao núcleo A, devem ser distribuídos, de forma diretamente proporcional ao número de sócios, pelos outros dois núcleos, temos que o número de sócios dos núcleos B e C, é:

$$1152 + 395 = 1547$$

Pelo que, calculando a proporção c, dos 268 convites, correspondente ao núcleo C, temos:

$$\frac{1547}{268} = \frac{395}{c} \Leftrightarrow c = \frac{395 \times 268}{1547} \Rightarrow c \approx 68{,}4$$

Assim, temos que o número de convites que seriam atribuídos ao núcleo C, dos que foram dispensados pelo núcleo A, é 68.

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos que:

	A	**B**	**C**
Número de sócios	939	1159	395
Total de sócios	$939 + 1150 + 395 = 2493$		
Divisor padrão	$\frac{2493}{710} \approx 3{,}51$		
Quota padrão	$\frac{939}{3{,}51} \approx 267{,}52$	$\frac{1159}{3{,}5} \approx 330{,}20$	$\frac{395}{5{,}31} \approx 112{,}54$
Primeira atribuição	267	330	112
Total provisório	$267 + 330 + 112 = 709$		
Segunda atribuição	0	0	1

Assim, temos que o número de convites que cada núcleo recebeu, é:

- Núcleo A: 267 convites
- Núcleo B: 330 convites
- Núcleo C: $112 + 1 = 113$ convites

2. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: $(1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400)$, e como também não ficou na 4.ª preferência (jogador Q) nem na 3.ª (jogador S), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1.ª Preferência	**2.ª Preferência**	**3.ª Preferência**	**4.ª Preferência**
Jogador	R	S	P	Q

3. De acordo com as capacidades indicadas na tabela, e como a comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores, podemos observar que não serão inspecionados os estádios da Austrália e da França.

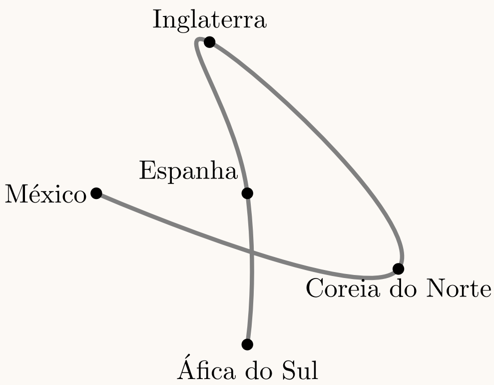
Assim, não considerando linhas e colunas relativas à Ausrália e França na tabela relativa às durações dos voos e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura,onde as arestas representam os voos e os vértices a localização dos estádios:

I - Aresta Espanha-Inglaterra - duração 1h55 (menor tempo de voo)

II - Aresta Espanha-África do Sul - duração 10h25

III - Aresta Inglaterra- Coreia do Norte - duração 11h16
(não se considera a aresta México-Inglaterra, porque já selecionamos uma aresta com Inglaterra)
(não se considera a aresta África do Sul-Inglaterra, porque já selecionamos arestas com estes países)
(não se considera a aresta África do Coreia do Norte-Espanha, porque já selecionamos arestas com estes países)
(não se considera a aresta África do Coreia do Espanha-México, porque já selecionamos duas arestas com Espanha)

IV - Aresta Coreia do Norte-México - duração 15h25



Desta forma, o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul, é:

África do Sul → Espanha → Inglaterra → Coreia do Norte → México

4. De acordo com as condições do empréstimo, o atleta terá que pagar 0 valor financiado acrescido de 16%, ou seja, um valor total de

$$1200 + 1200 \times 0{,}16 = 1200 \times 1{,}16 = 1392 \text{ €}$$

Como o prazo de pagamento é de dois anos (24 meses) e as prestações são constantes, o valor de cada prestação mensal é:

$$\frac{1392}{24} = 58 \text{ €}$$

5.

5.1. Analisando todas os cenários possíveis temos:

- 3 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $3 \times 18 = 54$ pontos e não 58 como indicado.
- 2 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $2 \times 18 + 25 = 61$, pontos se na prova restante tivesse ficado em primeiro lugar, ou $2 \times 18 + 15 = 51$ pontos se na prova restante tivesse ficado em terceiro lugar, em qualquer outr posição na prova restante teria ainda menos pontos e nunca os 58 indicados.
- 1 vez: esta situação pode ter ocorrido visto que teria que ter ocupado um primeiro lugar, visto que com um segundo e dois terceiros a pontuação seria $18 + 2 \times 15 = 48$ pontos. Considerando um primeiro e um segundo, a pontuação obtida é $18 + 25 = 43$ pontos e assim para a prova restante a pontuação necessária seria $58 - 43 = 15$ correspondente a um terceiro lugar.

Como se pretende identificar o número máximo de vezes que o piloto pode ter ficado em segundo lugar, a resposta é 1, correspondendo a 1 primeiro lugar, 1 segundo lugar e um terceiro lugar.

Resposta: **Opção B**

5.2.

5.2.1. Pela observação do gráfico, e sabendo que a pontuação no Reino Unido foi de 18 pontos, podemos determinar a pontuação dos quatro últimos GP, adicionando a diferença para os GP que se realizaram depois deste:

GP	Variação	Pontos
Reino Unido	6	18
Itália	-8	$18 - 8 = 10$
França	0	$10 + 0 = 10$
Japão	15	$10 + 15 = 25$

Assim, o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP, é:

$$\overline{x} = \frac{18 + 10 + 10 + 25}{4} = 15{,}75$$

5.2.2. Como o piloto obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas obteve 25 pontos.

Como no GP de Espanha a variação foi de -21, a pontuação obtida foi de $25-21=4$ pontos.

Como este GP tem um total de 66 voltas, das quais só se realizaram 45, a percentagem p de voltas concluídas é:

$$\frac{66}{100}=\frac{45}{p} \Leftrightarrow p=\frac{45\times 100}{66} \Rightarrow p\approx 68{,}18\,\%$$

Ou seja, no GP de Espanhanão se cumpriram pelo menos 70% das voltas previstas, pelo que os 4 pontos obtidos pelo piloto correspondem a metade dos pontos previstos na tabela para a sua posição, ou seja 8 pontos, a que corresponde a 6.ª posição.

6.

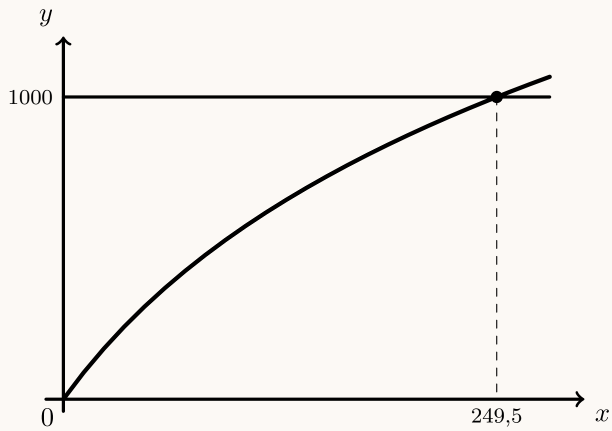
6.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular as distâncias percorridas, respetivamente em 5 segundos e em 10 segundos após o inicio da prova:

- $D(5)=-3680+1840\log(5+100)\approx 38{,}98831$
- $D(10)=-3680+1840\log(10+100)\approx 76{,}16254$

Assim temos que a distância percorrida nos primeiros 5 segundos foi, aproximadamente 38,99 metros e nos 5 segundos seguintes foi de $76{,}16254-38{,}98831\approx 37{,}17$ metros. Assim, no segundo período de 5 segundos percorreu uma distância inferior no mesmo espaço de tempo, pelo que a afirmação do atleta é correta.

6.2. Como a prova tem 1000 metros, o tempo, em segundos, que o atleta demorou a fazer a prova é a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função que modela a distância percorrida pelo atleta com a reta de equação $y=1000$.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y=-3680+1840\log(x+100)$ e a reta $y=1000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(249{,}5\,;\,1000)$.



Assim, temos que o atleta demorou 249,5 segundos a completar a prova, e como o recorde mundial é de $3\times 60+15=195$ segundos, a diferença, em segundos, arredondado às décimas, entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial é:

$$249{,}5-195=54{,}5 \text{ segundos}$$

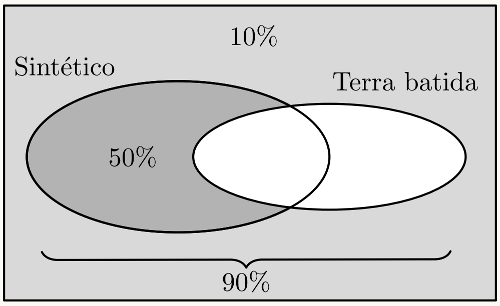
7.

7.1. Como 90% dos adversários do Alexandre venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida, a percentagem de adversários que nunca venceram é:

$$100 - 90 = 10\%$$

Como 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida, e destes 10% nunca venceram qualquer torneio, a percentagem dos que venceram em piso sintético, sem terem vencido em terra batida. é:

$$60 - 10 = 50\%$$



Resposta: **Opção C**

7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em o Alexandre começar uma partida, e os acontecimentos:
$S1$:≪Conseguir um primeiro serviço bem-sucedido≫
Pt:≪Conseguir pontuar≫

Temos, de acordo com os dados do gráfico, que: $P(S1) = 0{,}7$, $P(Pt|S1) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{S1} \cap \overline{Pt}\right) = 0{,}12$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{S1}\right) = 1 - P(S1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- $P\left(\overline{S1} \cap Pt\right) = P\left(\overline{S1}\right) - P\left(\overline{S1} \cap \overline{Pt}\right) = 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$
- $P(S1 \cap Pt) = P(Pt|S1) \times P(S1) = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$

	$S1$	$\overline{S1}$	
Pt	0,56	0,18	0,74
$\overline{Pt}$		0,12	
	0,7	0,3	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de tendo colocado uma bola em jogo, o Alexandre pontuar, é:

$$P(Pt) = P(S1 \cap Pt) + P\left(S1 \cap \overline{Pt}\right) = 0{,}56 + 0{,}18 = 0{,}74$$

7.3. Como o Alexandre vai tentar defender dois serviços dos seus adversários, a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço pode ser calculada como a soma das probabilidades de defender apenas o primeiro, defender apenas o segundo ou não defender qualquer serviço.

Como a probabilidade de defender um serviço é 0,6, a a probabilidade de não defender um serviço é $1 - 0{,}6 = 0{,}4$, pelo que a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço dos seus adversários, é:

$$\overbrace{0{,}6 \times 0{,}4}^{\text{defender apenas o 1.º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}6}^{\text{defender apenas o 2.º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}4}^{\text{não defender nenhum}} = 0{,}64$$

8. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

   - A dimensão da amostra: $n = 225$
   - A proporção amostral de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo: $\hat{p} = \dfrac{81}{225} = 0{,}36$
   - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}36 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \; ; \; 0{,}36 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \right[\approx \left]0{,}28; 0{,}44\right[$$