

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens que envolvem cálculos, apresente todas as justificações necessárias e todos os cálculos que tiver de efetuar.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

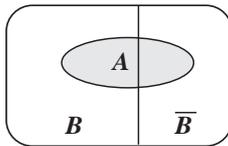
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

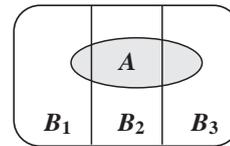
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\hat{p} – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Todos os anos, na freguesia de Avelares, realiza-se a Festa da Freguesia. A organização da festa é da responsabilidade de uma comissão formada por 15 moradores da freguesia, garantindo-se que exista uma proporção representativa do número de moradores das três zonas em que esta se divide, Zona Norte (N), Zona Centro (C) e Zona Sul (S).

Os moradores de cada uma das zonas, interessados em pertencer à comissão, começam por se inscrever. No total, este ano, 105 moradores da freguesia inscreveram-se para fazer parte da comissão.

Na Figura 1, encontra-se organizada, por zonas da freguesia, a contagem dessas 105 inscrições.

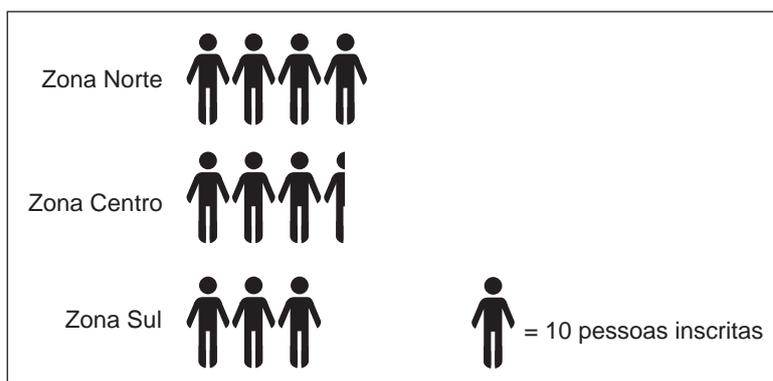


Figura 1

A composição da comissão resulta da aplicação do método a seguir descrito.

- 1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de pessoas inscritas pelo número de pessoas que fará parte da comissão.
- 2.º passo: Calcula-se a quota padrão de cada zona, dividindo-se pelo divisor padrão o número de pessoas inscritas de cada zona.
- 3.º passo: Se a quota padrão de uma zona for um número inteiro, atribui-se essa quota a essa zona.
- 4.º passo: Se a quota padrão de uma zona não for um número inteiro, calcula-se $\sqrt{L(L+1)}$, sendo L o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- 5.º passo: Se a quota padrão de uma zona for menor do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a essa zona uma quota modificada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão de uma zona for maior do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a essa zona uma quota modificada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão. O número de pessoas a seleccionar por cada zona, cuja quota padrão não for um número inteiro, é igual à respetiva quota modificada.

Indique a constituição da comissão, resultante da aplicação do método descrito, determinando o número de pessoas de cada zona.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve uma casa decimal.

2. No recinto da Festa da Freguesia, existem 5 expositores, L , M , N , O e P , que estão ligados por troços pedonais, como se pode observar na Figura 2.

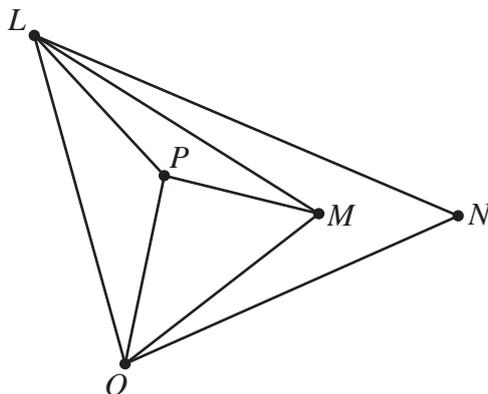


Figura 2

- * 2.1. O presidente da junta de freguesia pretende visitar todos os expositores, sem repetir nenhum deles, iniciando a visita no expositor L .

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O presidente da junta de freguesia verificou que existem **I** percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O , apenas existe(m) **II** percurso(s) possível(is).

Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor **III** e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N , poderia visitar o expositor **IV** .

I	II	III	IV
a) 2	a) 1	a) N	a) M
b) 3	b) 2	b) O	b) O
c) 4	c) 3	c) P	c) P

- * 2.2. No final de cada dia, o Rui verifica se todos os expositores, L , M , N , O e P , e o restaurante, $R1$, ficam devidamente encerrados.

Na Tabela 1, estão indicados os comprimentos, em metros, dos troços pedonais que ligam os diferentes espaços.

Tabela 1

	L	M	N	O	P	$R1$
L		284	401	375	356	
M	284			255	270	253
N	401			260		
O	375	255	260		200	250
P	356	270		200		214
$R1$		253		250	214	

O Rui deve iniciar a verificação no restaurante, $R1$.

Para definir o percurso, utiliza o método seguinte.

- Seleciona o espaço a visitar em seguida, tendo em conta que:
 - deve ser o mais próximo possível;
 - se houver dois espaços à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede como foi indicado no ponto anterior, não repetindo nenhum espaço, e termina depois de ter verificado todos os espaços.

Determine a distância, em metros, percorrida pelo Rui.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;
- o percurso que respeita as condições definidas.

3. A Mariana é uma funcionária da junta de freguesia de Avelares que, após ser promovida, passou a auferir um salário bruto de 1500 euros. O salário bruto, também designado por remuneração mensal, é o salário antes de quaisquer descontos e não inclui o subsídio de refeição.

Admita que o salário líquido, valor monetário que a Mariana efetivamente recebe, resulta da aplicação da fórmula de cálculo seguinte:

$$SL = SB + SR - SS - RF$$

Em que:

- SL é o salário líquido, em euros;
- SB é o salário bruto, em euros;
- SR é o subsídio de refeição, em euros, que corresponde a 5,2 euros por cada dia de trabalho realizado durante o mês;
- SS é a contribuição para a Segurança Social, em euros, que corresponde a 11% do salário bruto;
- RF é a retenção na fonte, em euros, calculada sobre o salário bruto, com base nos dados publicados, anualmente.

A Tabela 2 é a tabela que a Mariana consulta para saber qual o valor da taxa de retenção na fonte aplicada ao seu salário bruto.

Tabela 2

Salário bruto mensal (euros)	Número de dependentes					
	0	1	2	3	4	5 ou mais
...						
]822,00; 931,00]	10,1%	7,3%	6,5%	3,8%	3,1%	1,2%
]931,00; 1015,00]	11,3%	8,6%	7,8%	5,1%	4,4%	3,1%
]1015,00; 1075,00]	12,1%	9,5%	8,6%	6,0%	4,8%	3,9%
]1075,00; 1154,00]	13,1%	11,4%	10,6%	7,9%	7,1%	5,3%
]1154,00; 1237,00]	14,1%	12,4%	11,5%	8,9%	8,0%	6,3%
]1237,00; 1333,00]	15,1%	14,4%	12,6%	10,7%	9,0%	8,1%
]1333,00; 1437,00]	16,1%	15,3%	13,6%	11,9%	10,0%	9,2%
]1437,00; 1577,00]	17,1%	16,4%	14,6%	12,8%	11,1%	10,2%
]1577,00; 1727,00]	18,5%	17,7%	16,1%	14,3%	13,4%	11,7%
...						

Fonte: <https://info.portaldasfinancas.gov.pt> (consultado em outubro de 2022). (Adaptado)

Por exemplo, segundo esta tabela, a um salário bruto, no valor de 1300 euros, de um trabalhador com quatro dependentes, será aplicada a taxa de retenção na fonte de 9,0%.

Admita que a Mariana tem dois dependentes e que, no próximo mês, trabalhará 22 dias.

Determine o valor do salário líquido da Mariana no próximo mês.

- * 4. Dois amigos, o Augusto e o Joaquim, todos os anos compram, a meias, um conjunto de rifas. Num certo ano, ganharam os prémios X , Y e Z .

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três prémios, resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos três prémios, num total de 100 pontos.
- Cada prémio é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) prémio(s) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Se o total de pontos for igual, a partilha está concluída. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual de pontos, no total, através da partilha de um dos prémios.
- Para se efetuar o ajuste da partilha, o prémio a partilhar pelos amigos será, de entre os atribuídos ao amigo com total de pontos mais elevado, aquele que tiver menor diferença de pontos atribuídos.
 - Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo. O total final de pontos a atribuir ao amigo A corresponde à diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
 - O total final de pontos a atribuir ao amigo B corresponde à soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
 - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x , com o qual a partilha ficará equilibrada.
 - O amigo B fica com o(s) prémio(s) a si destinado(s) e x por cento do prémio a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na Tabela 3, apresenta-se o número de pontos atribuído aos três prémios por cada um dos amigos.

Tabela 3

	X	Y	Z
Augusto	32	38	30
Joaquim	24	51	25

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O prémio temporariamente destinado ao Joaquim foi o prémio **I**, sendo o total de pontos dos prémios temporariamente destinados ao Augusto igual a **II**. O prémio a utilizar no ajuste da partilha é o prémio **III**. Na partilha final dos prémios, o Augusto terá direito a **IV** desse prémio.

I	II	III	IV
a) <i>X</i>	a) 32	a) <i>X</i>	a) 15%
b) <i>Y</i>	b) 62	b) <i>Y</i>	b) 20%
c) <i>Z</i>	c) 68	c) <i>Z</i>	c) 80%

5. O número de habitantes da freguesia de Avelares, decorridas t décadas após o início do ano 1970, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$A(t) = \frac{10\,566}{1 + 5e^{-0,8t}}, \quad t \geq 0$$

- * 5.1. Em qual dos intervalos de tempo o crescimento da população foi mais acentuado?

- (A) Do início de 1980 ao início de 1990
- (B) Do início de 1990 ao início de 2000
- (C) Do início de 2000 ao início de 2010
- (D) Do início de 2010 ao início de 2020

- 5.2. Na década em que o número de habitantes da freguesia atingiu os cinco milhares, o centro de saúde de Avelares sofreu uma ampliação.

Prove que a ampliação do centro de saúde de Avelares ocorreu durante a década de 80.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

- * 5.3. O número de habitantes da freguesia de Bileira, uma freguesia vizinha de Avelares, decorridas t décadas após o início do ano 1970, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$B(t) = \frac{a}{1 + 4e^{-0,7t}}, \quad t \geq 0 \text{ e } a \text{ número real positivo.}$$

De acordo com os modelos apresentados, as freguesias de Avelares e Bileira tinham o mesmo número de habitantes no início do ano 1970.

Determine o número de habitantes da freguesia de Bileira, com arredondamento às unidades, no início do ano de 2020.

Na sua resposta, comece por determinar o valor de a .

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

6. Uma das atrações da Festa da Freguesia é a quermesse, onde se podem comprar rifas.

Considere que, num conjunto de 200 rifas:

- 120 são verdes;
- um quarto das rifas verdes são rifas premiadas;
- das rifas premiadas, há tantas verdes quantas as que não são verdes.

Escolhe-se, aleatoriamente, uma rifa daquele conjunto de 200.

Determine a probabilidade de a rifa escolhida não ser premiada, sabendo-se que não é verde.

Apresente a sua resposta na forma de dízima.



* 7. De acordo com um estudo, o tempo que cada cliente aguarda até ser atendido na zona de restauração da Festa da Freguesia segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 15 minutos, sendo a probabilidade de um cliente aguardar entre 7 e 23 minutos até ser atendido igual a 0,9545.

Considere que, num determinado dia, foram atendidos 1550 clientes.

Determine quantos desses clientes é de esperar que aguardem entre 11 e 15 minutos até serem atendidos.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

Na sua resposta, apresente, justificando, o valor do desvio padrão.

8. No ano passado, a Festa da Freguesia teve a duração de catorze dias, consecutivos, correspondendo a duas semanas completas. A festa começou no domingo, dia 7, e terminou no sábado, dia 20.

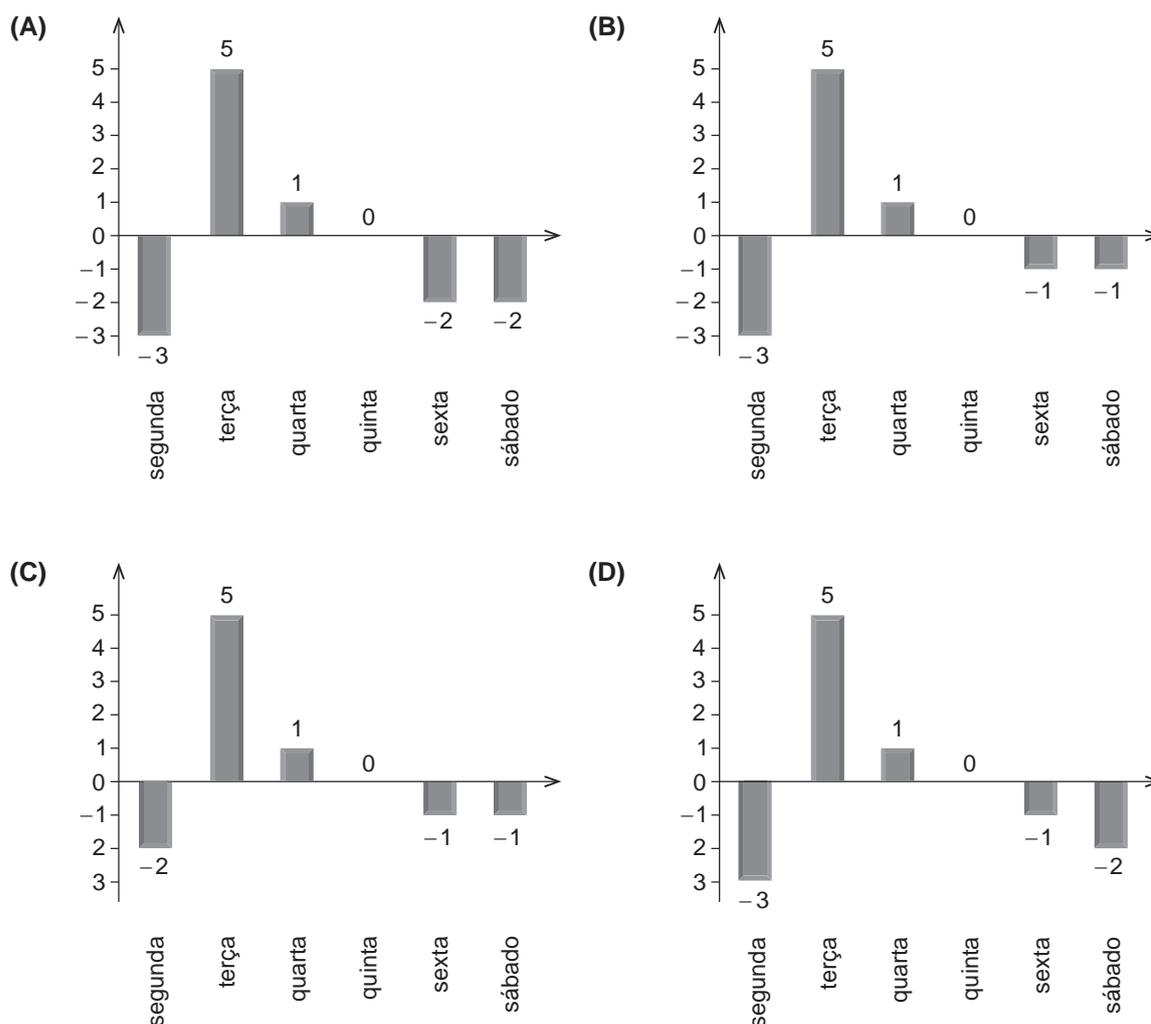
Na Tabela 4, apresentam-se os dados das temperaturas (T), mínima e máxima, em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$), e da precipitação acumulada diária (P), em milímetros (mm), para cada dia da primeira semana da festa.

Tabela 4

1.^a semana

	Dom., 7	Seg., 8	Terça, 9	Quarta, 10	Quinta, 11	Sexta, 12	Sáb., 13
							
	Céu nublado	Céu nublado	Céu nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado
T	16 $^{\circ}\text{C}$ 26 $^{\circ}\text{C}$	15 $^{\circ}\text{C}$ 23 $^{\circ}\text{C}$	16 $^{\circ}\text{C}$ 28 $^{\circ}\text{C}$	16 $^{\circ}\text{C}$ 29 $^{\circ}\text{C}$	15 $^{\circ}\text{C}$ 29 $^{\circ}\text{C}$	15 $^{\circ}\text{C}$ 28 $^{\circ}\text{C}$	14 $^{\circ}\text{C}$ 26 $^{\circ}\text{C}$
P	1 mm	0,5 mm	0,1 mm	0,2 mm	0 mm	0,3 mm	3 mm

* 8.1. Em qual das opções seguintes está representado, para a primeira semana, o gráfico de variação da temperatura máxima, relativamente ao dia anterior?



- * 8.2.** Associe a cada conjunto de dados apresentados na Coluna I (e registados na Tabela 4) as afirmações da Coluna II que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna I, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna II.

COLUNA I	COLUNA II
<p>(a) Dados da temperatura mínima</p> <p>(b) Dados da temperatura máxima</p> <p>(c) Dados da precipitação acumulada diária</p>	<p>(1) O conjunto dos dados é o que apresenta média inferior à mediana.</p> <p>(2) O conjunto dos dados é o que apresenta o primeiro quartil igual à mediana.</p> <p>(3) Num par de dias consecutivos, são os únicos dados que apresentam um valor decrescente, enquanto os outros apresentam um valor crescente.</p> <p>(4) O conjunto dos dados é amodal.</p> <p>(5) O conjunto dos dados é o que apresenta menor dispersão em relação à média.</p> <p>(6) A amplitude dos dados é igual a 6.</p> <p>(7) A percentagem dos dados acima da sua média é inferior a 30%.</p>

- * 8.3.** Admita que, comparando a temperatura máxima registada no domingo, dia 7, com a temperatura máxima registada no domingo, dia 14; comparando a temperatura máxima registada na segunda-feira, dia 8, com a temperatura máxima registada na segunda-feira, dia 15, e assim sucessivamente, as mesmas diminuíram exatamente o mesmo valor em graus Celsius.

Considere que a média das temperaturas máximas registadas na freguesia de Avelares durante os catorze dias da Festa da Freguesia foi 25,5 °C.

Qual foi a descida, em graus Celsius, da temperatura máxima, comparando a temperatura máxima registada no domingo, dia 7, com a temperatura máxima registada no domingo, dia 14?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

9. Ao longo dos anos, tem-se registado uma elevada afluência à Festa da Freguesia.

Para estimar a proporção de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia pela primeira vez em 2022, realizou-se um estudo.

Para esse estudo, recorreu-se a uma amostra aleatória de visitantes da festa, em 2022. A cada visitante foi perguntado se era a primeira vez que visitava a festa ou se já o fizera antes; a estes últimos, foi pedido que indicassem o número de anos distintos em que haviam visitado a festa (incluindo o ano em que o estudo se realizou).

No Gráfico 1, apresentam-se os resultados obtidos.

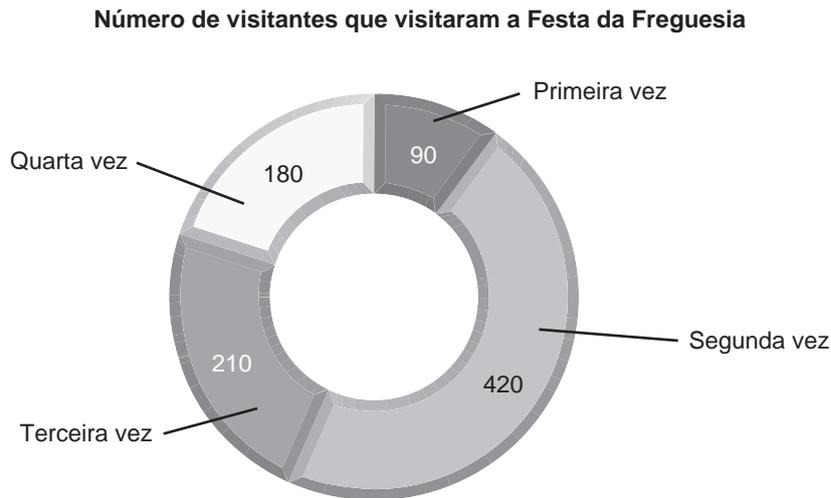


Gráfico 1

Determine o intervalo de confiança a 90% para a proporção de visitantes da Festa da Freguesia que a visitaram pela primeira vez em 2022.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	2.1.	2.2.	4.	5.1.	5.3.	7.	8.1.	8.2.	8.3.	Subtotal
Cotação (em pontos)	14	20	14	14	18	18	14	14	20	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.	3.	5.2.	6.	9.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									54
TOTAL										200

Prova 835

1.^a Fase