Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2024, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método descrito, sem contemplar o voto da Daniela, ou seja, apenas com os dados da tabela, temos:

   - Pontuação do Artur: $3 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 5 = 15 + 6 + 3 + 5 = 29$
   - Pontuação do Bruno: $3 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 9 + 2 + 15 + 1 = 27$
   - Pontuação do César: $3 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 1 \times 3 = 3 + 10 + 9 + 3 = 25$

   Como existem seis possibilidades de ordenação do voto da Daniela, podemos verificar qual delas verifica as constatações que se apuraram:

Ordenação	Total **A**	Total **B**	Total **C**	Análise e justificação
A>B>C	$29 + 5 = 34$	$27 + 3 = 30$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque o César não ficaria em segundo lugar.
A>C>B	$29 + 5 = 34$	$27 + 1 = 28$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>A>C	$29 + 3 = 32$	$27 + 5 = 32$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>C>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 5 = 32$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque o candidato escolhido não seria o Artur.
C>A>B	$29 + 3 = 32$	$27 + 1 = 28$	$25 + 5 = 30$	Todas as constatações se verificam.
C>B>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 3 = 30$	$25 + 5 = 30$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.

   Assim, vem que:

   Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **29** pontos, e o candidato **B** estava em segundo lugar.
   Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve **32** pontos.
   Na lista de preferências da Daniela, o candidato **C** estava na primeira preferência.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I** $\rightarrow$ **b)**
   - **II** $\rightarrow$ **b)**
   - **III** $\rightarrow$ **a)**
   - **IV** $\rightarrow$ **c)**

2. Aplicando o método descrito, temos:

Curso	**CT**	**LH**	**SE**
Número de alunos	530	384	340
Total de alunos da escola	$530 + 384 + 340 = 1254$		
Quota	$Q = \frac{1254}{10+1} = 114$		
Primeiro quociente	$\frac{530}{114} \approx 4{,}65$	$\frac{384}{114} \approx 3{,}37$	$\frac{340}{114} \approx 2{,}98$
Primeira atribuição	4	3	2
Total provisório	$4 + 3 + 2 = 9$		
Segundo quociente	$\frac{530}{4+1} = 106$	$\frac{384}{3+1} = 96$	$\frac{340}{2+1} \approx 113{,}33$
Segunda atribuição	0	0	1

Assim, temos que os 10 alunos que constituem a equipa, são:

- Alunos de CT: 4
- Alunos de CT: 3
- Alunos de SE: $2 + 1 = 3$

3. Identificando os valores de que depende o valor a pagar, V, considerando um consumo de 450 kWh durante 31 dias, temos:

- IEC: $0{,}001 \times 450 = 0{,}45$ €, sem IVA, e $0{,}45 \times 1{,}23 = 0{,}5535$ €, com IVA;
- PC: $0{,}1263 \times 31 = 3{,}9153$ €, sem IVA, e $3{,}9153 \times 1{,}23 \approx 4{,}8158$ €, com IVA;
- AR: $0{,}0299 \times 31 = 0{,}9269$ €, sem IVA, e $0{,}9269 \times 1{,}06 \approx 0{,}9825$ €, com IVA;
- CA: 3,02 €;
- TE: 0,09 €;

Assim, usando a fórmula de cálculo apresentada, podemos determinar o valor parcela relativa ao consumo C, para o valor a pagar de 79,87 €:

$$79{,}87 = C + 0{,}5535 + 4{,}8158 + 0{,}9825 + 3{,}02 + 0{,}09 \Leftrightarrow 79{,}87 = C + 9{,}4618 \Leftrightarrow 79{,}87 - 9{,}4618 = C \Leftrightarrow 70{,}4082 = C$$

Assim, temos que o valor do consumo relativo a 450 kWh, foi de:

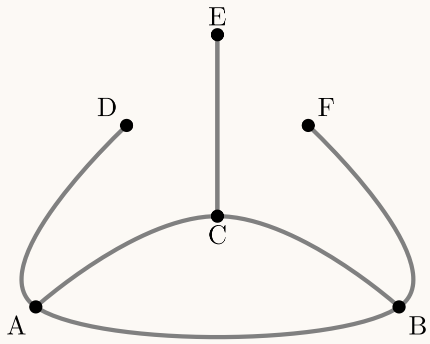
- 70,4082 €, com IVA;
- $0{,}1476 \times 450 = 66{,}42$ €, sem IVA.

Logo o valor do IVA relativo à parcela do consumo foi $70{,}4082 - 66{,}42 = 3{,}9882$ €, pelo que, estabelecendo a proporção adequada podemos calcular a taxa de IVA (T_C) aplicada ao consumo:

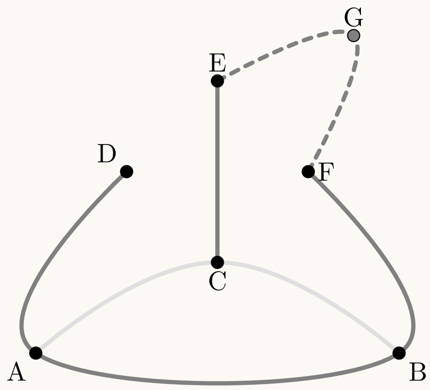
$$\frac{T_C}{100} = \frac{3{,}9882}{66{,}42} \Leftrightarrow T_C = \frac{3{,}9882 \times 100}{66{,}42} \Leftrightarrow T_C \approx 6\%$$

4. De acordo com a observação das cartas da figura, podemos traçar o grafo seguinte:

- Carta A - Conecta com as restantes com número 1 (B e C) e as restantes com círculo (D)
- Carta B - Conecta com as restantes com número 1 (A e C) e as restantes com quadrado (F)
- Carta C - Conecta com as restantes com número 1 (A e B) e as restantes com triângulo (E)
- Carta D - Conecta com as restantes com um círculo (A). Não existem outras com o número 2.
- Carta E - Conecta com as restantes com um triângulo (C). Não existem outras com o número 3.
- Carta F - Conecta com as restantes com um quadrado (B). Não existem outras com o número 4.



Acrescentando ao grafo anterior um vértice que represente a carta G, que ficará conectado ao vértice F, porque sabemos que tem um quadrado, e para averiguar a possibilidade de ter o número 3, deverá ser conectado também com o vértice E,obtemos o grafo da figura ao lado.

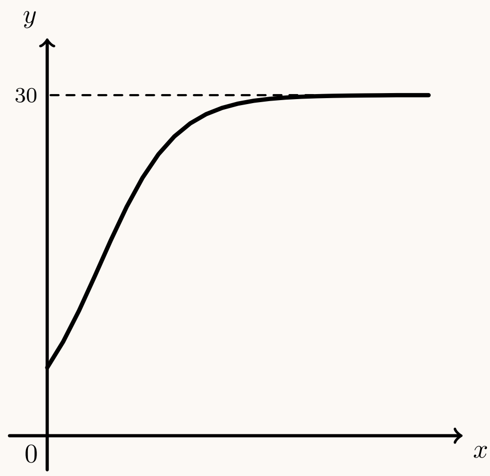


Assim, ignorando as arestas AC e BC, podemos observar que é possível que o algarismo presente na carta G seja o 3, e que, neste caso, um possível empilhamento das sete cartas, de acordo com as condições definidas, é:

$$\text{D} \rightarrow \text{A} \rightarrow \text{B} \rightarrow \text{F} \rightarrow \text{G} \rightarrow \text{E} \rightarrow \text{C}$$

(O percurso D $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ E $\rightarrow$ G $\rightarrow$ F, também satisfaz as condições do enunciado).

5.



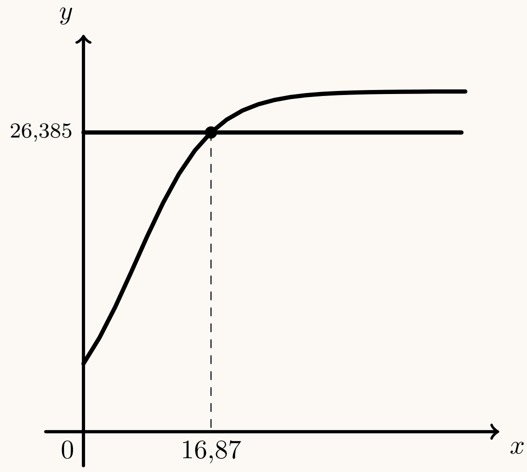
5.1. Observando a representação gráfica do modelo $P(t)$, na calculadora gráfica, podemos verificar que os valores se aproximam de 30, com o passar do tempo.

Como o modelo exprime o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, o número de utilizadores tende para 30 centenas, ou seja, 3000.

Resposta: **Opção C**

5.2. Assim, usando a calculadora gráfica para obter o gráfico da função P, relativo ao ano 2021, e também o gráfico da função constante $f(x) = 26{,}385$, numa janela adequada, podemos observar que, aproximadamente 16,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2020, o número de utilizadores da aplicação atingiu o triplo do que existia a 1 de fevereiro de 2016.

Como 16,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2020, corresponde a 4,87 meses após o dia 1 de janeiro de 2021, este momento corresponde a uma data relativa a maio de 2021.



5.3. Representando os dois modelos na calculadora gráfica e observando a sua representação em tabela, podemos procurar os meses em que no primeiro dia, o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900:

t	$N(t)$	$P(t)$
0	9,400	6,000
1	8,795	7,018
2	8,441	8,149
3	8,190	9,389
4	7,995	10,725
5	7,836	12,138
6	7,701	13,607
7	7,585	15,103
8	7,482	16,597
9	7,390	18,059

t	$N(t)$	$P(t)$
10	7,307	19,464
11	7,231	20,787
12	7,161	22,012
13	7,096	23,129
14	7,036	24,130
15	6,980	25,018
16	6,927	25,794
17	6,877	26,467
18	6,830	27,044
19	6,785	27,536

- entre 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2019, foram 14 os meses em que o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900;
- a partir 1 de janeiro de 2020, o número de utilizadores da aplicação esteve entre 700 e 900 em apenas 2 meses.

Assim, temos que o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900, em $14 + 2 = 16$ meses.

Resposta: **Opção B**

6.

6.1. Obtendo os valores da variável x, para cada um dos meses, como a soma dos números de equipas que concluíram o jogo e das que não o concluíram, e inserindo na calculadora gráfica as listas relativas às variáveis x e y, obtemos:

x	y
$24 + 31 = 55$	24
$30 + 45 = 75$	30
$44 + 56 = 100$	44
$62 + 63 = 125$	62
$50 + 75 = 125$	50

Determinando a equação da reta de regressão ($y = ax + b$), temos que os valores de a e b, usando valores aproximados com três casas decimais, são $a \approx 0{,}474$ e $b \approx -3{,}487$.

Desta forma a equação da reta de regressão é $y = 0{,}474x - 3{,}487$, pelo que, se no outro mês em causa,participaram 80 equipas no jogo($x = 80$), o número de equipas que o concluiu nesse mês (y), com base no modelo de regressão linear, é:

$$y \approx 0{,}474 \times 80 - 3{,}487 \approx 34$$

6.2. Analisando cada uma das afirmações da coluna **II**, em cada uma das classes, temos:

Coluna II	[18,28[	[28,38[	[38,48[
(1)	Não concluíram: 6	Não concluíram: 3	Não concluíram: 21
(2)	Total de capitães: $6+9+3+15+21+21=75$		
	Capitães na classe: $6+9=15$ Quinta parte: $\frac{15}{75}\times 100=20\%$	Capitães na classe: $3+15=18$ Percentagem: $\frac{18}{75}\times 100=24\%$	Capitães na classe: $21+21=42$ Percentagem: $\frac{42}{56}\times 100=56\%$
(3)	Total de capitães que não concluíram: $9+15+21=45$		
	Quinta parte: $\frac{45}{5}=9$	Quinta parte: $\frac{45}{5}=9\ (\neq 15)$	Quinta parte: $\frac{45}{5}=9\ (\neq 21)$
(4)	Diferença: $9-6=3$	Diferença: $15-3=12$	Diferença: $21-21=0$
(5)	Capitães na classe: $6+9=15$	Capitães na classe: $3+15=18$	Capitães na classe: $21+21=42$
(6)	Frequência acumulada (%): $\frac{15}{75}\times 100=20\%$	Frequência acumulada (%): $\frac{15+18}{75}\times 100=44\%$	Frequência acumulada (%): 100%
(7)	Total de capitães que não concluíram: $9+15+21=45$		
	Frequência acumulada (%): $\frac{9}{45}\times 100=20\%$	Frequência acumulada (%): $\frac{9+15}{45}\times 100\approx 53{,}3\%$	Frequência acumulada (%): 100%

Assim, temos que:

(1) Das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*, o número de capitães cuja idade pertence à classe [28,38[é o menor.

(2) 56% dos capitães de equipa têm idade pertencente à classe [38,48[.

(3) A quinta parte dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* tem idade pertencente à classe [18,28[.

(4) [28,38[é a classe em que é maior a diferença entre o número de capitães das equipas que concluíram o jogo de Sala de Fuga e o número de capitães das equipas que não o concluíram.

(5) Considerando a totalidade dos capitães das equipas, [38,48[é a classe modal das suas idades (porque é a classe com maior frequência).

(6) Considerando a totalidade dos capitães das equipas, [38,48[é a classe mediana das suas idades(porque é a primeira classe com frequência acumulada superior a 50%).

(7) O primeiro quartil das idades dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de I pertence à classe [28,38[(porque é a primeira classe com frequência acumulada superior a 15%).

Logo, as correspondências corretas são:

- **(a) $\rightarrow$ (3)**
- **(b) $\rightarrow$ (1),(4),(7)**
- **(c) $\rightarrow$ (2),(5),(6)**

7.

7.1. Relacionando as frequências absolutas simples e as relativas simples, temos que:

- a frequência relativa acumulada da classe]40,50] é: $z = 100 - 7{,}5 = 92{,}5\%$;
- a frequência relativa simples da classe]10,20] é: $y = 52{,}5 - 12{,}5 = 40\%$;
- a frequência relativa simples da classe]30,40] é: $70-60 = 10\%$, pelo que 12 equipas correspondem a 10% do total, ou seja, no total existem $12 \times 10 = 120$ equipas, pelo que o valor de x pode ser calculado porque corresponde a 12,5% do total:

$$\frac{x}{120} = \frac{12{,}5}{100} \Leftrightarrow x = \frac{12{,}5 \times 120}{100} \Leftrightarrow x = 15$$

Como o tempo é uma variável quantitativa contínua, vem que:

A variável estatística em estudo é uma variável **quantitativa contínua:** .
De acordo com a informação disponível na tabela, o valor de y é **40** , o valor de z é 92,5 , e o valor de x é **15** .

Logo, as correspondências corretas são:

- **I** $\rightarrow$ **c)**
- **II** $\rightarrow$ **c)**
- **III** $\rightarrow$ **b)**
- **IV** $\rightarrow$ **a)**

7.2. A frequência relativa simples da classe]30,30], calculada a partir da respetiva frequência absoluta e também da da classe anterior, é $70 - 60 = 10\%$, e como existem um total de 120 equipas, temos que o número de equipas fotografadas pela Joana é 12.

Como 25% das 12 equipas concluíram o desafio num tempo superior a 35 minutos, o número de equipas que terminaram o desafio num tempo pertencente ao intervalo]35,40], é $12 \times 0{,}25 = 3$.

Assim, a probabilidade de apenas uma das duas fotografias colocadas nas duas primeiras páginas do álbum ser de uma destas 3 equipas, na forma de dízima com arredondamento às centésimas, é:

$$p = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} + \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} = 2 \times \frac{3 \times 9}{12 \times 11} \approx 0{,}41$$

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um capitão de uma equipa que, em 2023, participou num jogo de *Sala de Fuga*, e e os acontecimentos::
P_1: "O capitão participava pela primeira vez".
C: "O capitão concluiu o desafio".

Temos que: $P(P_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $P\left(\overline{P_1} \cap C\right) = 0{,}48$ e $P(C|P_1) = 0{,}56$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{P_1}\right) = 1 - P(P_1) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$
- $P(C \cap P_1) = P(C|P_1) \times P(P_1) = 0{,}25 \times 0{,}56 = 0{,}14$
- $P(C) = P(C \cap P_1) + P\left(C \cap \overline{P_1}\right) = 0{,}14 + 0{,}48 = 0{,}62$

	P_1	$\overline{P_1}$	
C	0,14	0,48	0,62
$\overline{C}$			
	0,25	0,75	1

Assim, temos que:

A probabilidade de esse capitão já ter participado anteriormente num jogo de Sala de Fuga era $\underline{P\left(\overline{P_1}\right) = 0{,}75}$.

A percentagem de capitães que participava pela primeira vez num jogo de *Sala de Fuga* e cujas equipas concluíram o desafio foi $\underline{P(P_1 \cap C) = 0{,}25 \times 0{,}56 = 0{,}14 = 14\%}$.

A probabilidade de o capitão pertencer a uma equipa que concluiu o desafio, sabendo-se que não participava pela primeira vez num jogo de Sala de Fuga, era $\underline{P\left(C|\overline{P_1}\right) = \frac{P\left(\overline{P_1} \cap C\right)}{P\left(\overline{P_1}\right)} = \frac{0{,}48}{0{,}75} = 0{,}64}$.

Conseguiram concluir o desafio $\underline{P(C) = 0{,}62 = 62\%}$ das equipas destes capitães.

Logo, as correspondências corretas são:

- **I $\rightarrow$ c)**
- **II $\rightarrow$ b)**
- **III $\rightarrow$ c)**
- **IV $\rightarrow$ a)**

9.

9.1. Como se sabe que a pessoa escolhida não indicou nem o jogo C nem o jogo D, o número de casos possíveis é $200 + 250 = 450$, correspondente às pessoas que escolheram o A ou o B.
Como se pretende calcular a probabilidade de ter preferido o A, o número de casos favoráveis é 200, pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, a probabilidade é:

$$P = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

Resposta: **Opção A**

9.2. O número de pessoas que reponderam sobre as suas preferências, ou seja, a dimensão da amostra, é:

$$n = 900$$

Calculando a proporção de pessoas que preferem o jogo C, temos:

$$\hat{p} = \frac{324}{900} = \frac{400}{625} = 0{,}36$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{900}} = 0{,}06272 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}06272}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{900}}} \Rightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}06$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é $\boxed{95\%}$.