EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª Fase**
2000 | **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

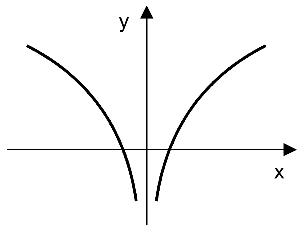
(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 1$

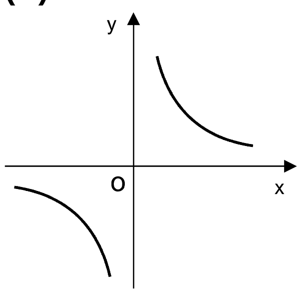
(D) Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

2. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

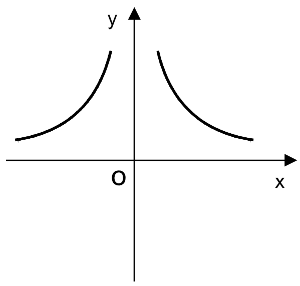


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g ?

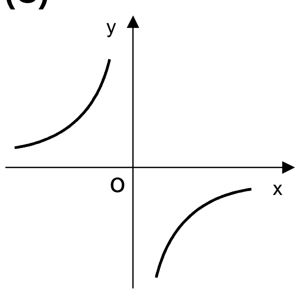
(A)



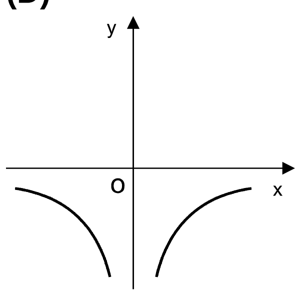
(B)



(C)

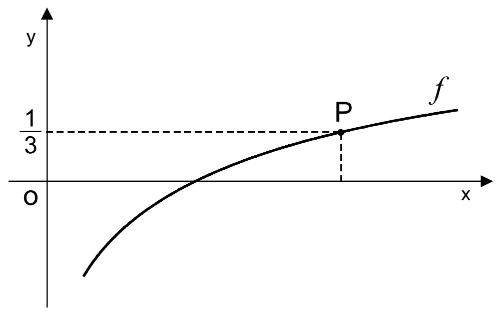


(D)



3. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f, que tem ordenada $\frac{1}{3}$



Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{8}{3}$ **(B)** 1 **(C)** $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ **(D)** 2

4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.

Admita que o tanque está vazio. Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 70]$ **(B)** $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 70]$

(C) $h(t) = 4 - 2t\ ,\ t \in [0, 140]$ **(D)** $h(t) = \frac{2t}{35}\ ,\ t \in [0, 140]$

5. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse de eixo maior paralelo ao eixo Oy e cujo centro é o ponto de intersecção das rectas $x = -1$ e $y = 2$.

Qual das seguintes equações pode definir esta elipse?

(A) $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ **(B)** $\frac{(x+1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$

(C) $(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ **(D)** $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $P(0,0,4)$ e $Q(0,4,0)$.
Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de recta $[PQ]$?

(A) $A\,(1,0,0)$ **(B)** $B\,(1,2,0)$ **(C)** $C\,(2,1,0)$ **(D)** $D\,(1,0,2)$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes rectas intersecta os três planos coordenados (xOy, xOz e yOz) ?

(A) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 0, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (0, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 2, 0),\ k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k\ (1, 2, 3),\ k \in \mathbb{R}$

8. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes.
Qual é a probabilidade de saírem três números ímpares?

(A) $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

9. Uma turma de uma escola secundária tem nove rapazes e algumas raparigas.
Escolhendo ao acaso um aluno da turma, a probabilidade de ele ser um rapaz é $\frac{1}{3}$
Quantas raparigas tem a turma?

(A) 27 **(B)** 18 **(C)** 15 **(D)** 12

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x\,(x^2 + x)$
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

1.1. Verifique que $f'(x) = e^x\,(x^2 + 3\,x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

1.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

1.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

2. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad\qquad n \in \{1, 2, 3, \text{..........}, 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

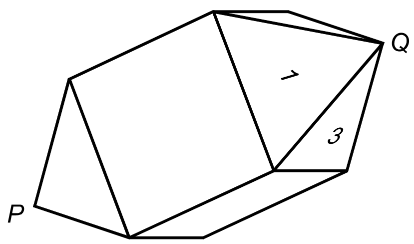
2.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Sem recorrer à calculadora, determine em quantos dias do ano é que o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de $12{,}2$ horas.

3. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.

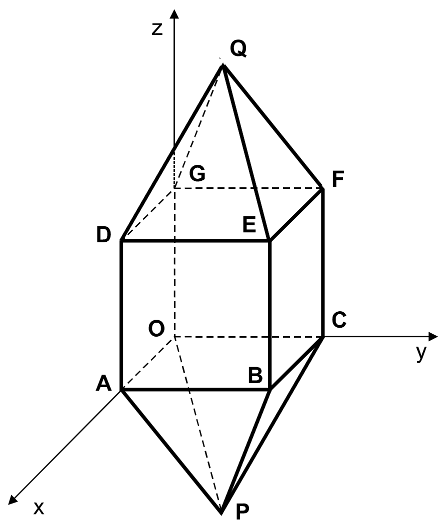


3.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).
Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

3.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

3.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

3.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$.
Sabe-se que:
- o vértice O do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice E do poliedro tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.



3.2.1. Justifique que o ponto F não pertence à superfície esférica de diâmetro $[PQ]$.

3.2.2. Mostre que a recta EG é perpendicular ao plano ADQ.

3.2.3. Determine a área da secção definida no poliedro pelo plano ADQ.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 39
- **1.1.** 11
- **1.2.** 14
- **1.3.** 14

2. 22
- **2.1.** 10
- **2.2.** 12

3. 58
- **3.1.** 22
  - **3.1.1.** 7
  - **3.1.2.** 15
- **3.2.** 36
  - **3.2.1.** 12
  - **3.2.2.** 12
  - **3.2.3.** 12

TOTAL **200**