

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2000

Reserva 2

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio \mathbb{R} e contradomínio \mathbb{R}^+ .

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\sin x$

(B) e^x

(C) $1 + x^2$

(D) $\ln x$

2. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sin x}$

(A) $-\infty$

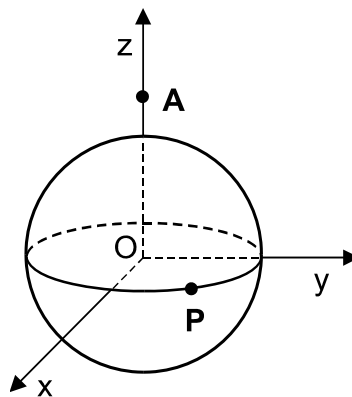
(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

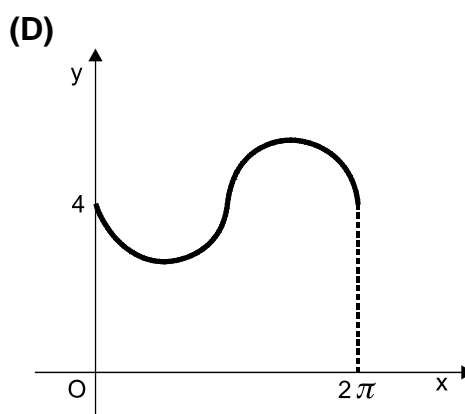
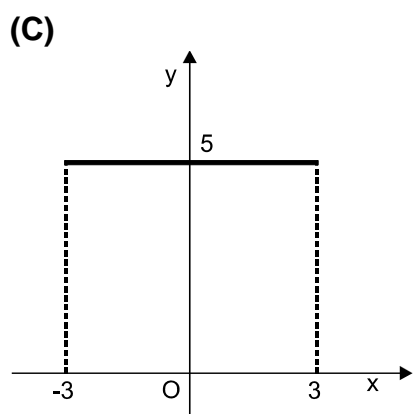
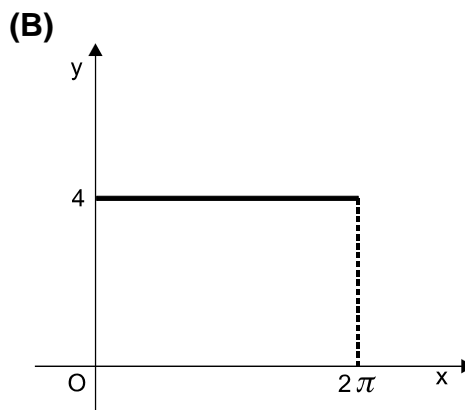
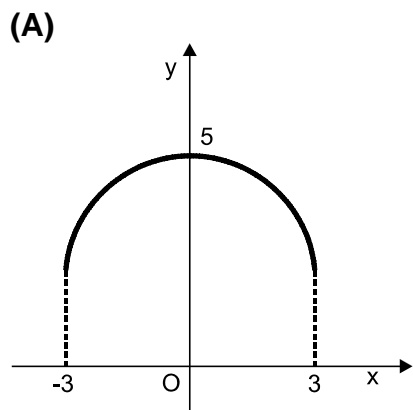
- o ponto A , de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy



Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.

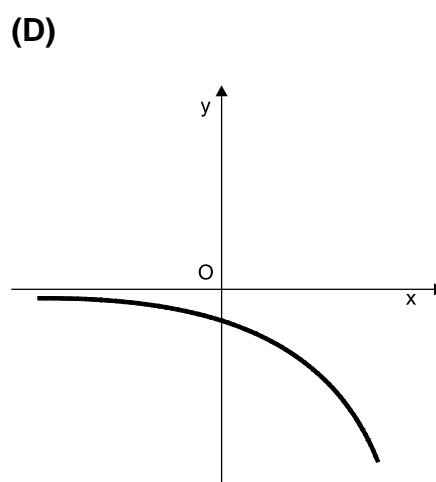
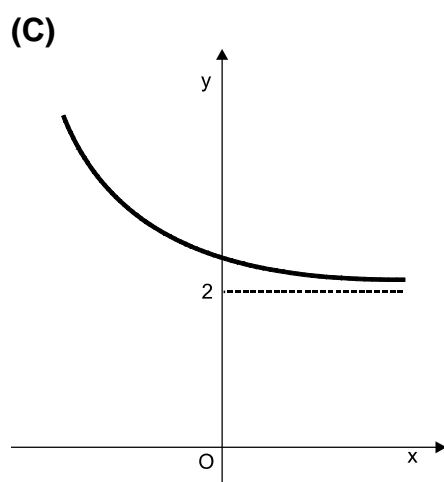
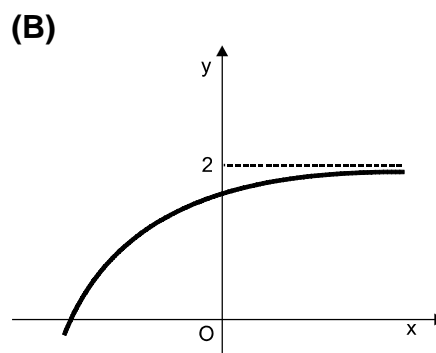
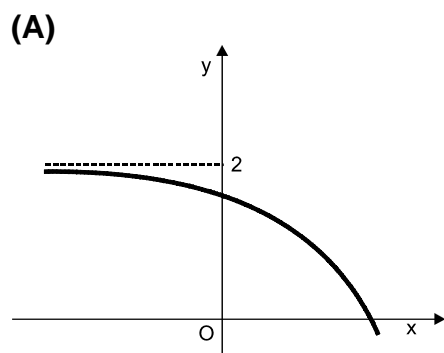
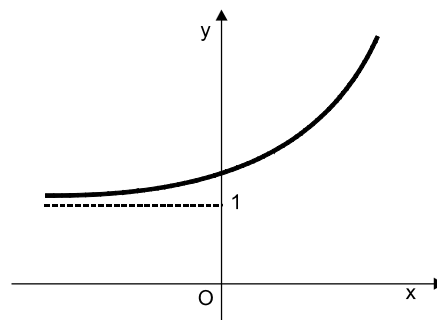
Considere a função f que faz corresponder, à **abscissa** do ponto P , a **distância** de P a A .

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?



4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g , de domínio \mathbb{R} .

Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h , definida em \mathbb{R} por $h(x) = -g(x) + 1$?



5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma recta r , perpendicular ao plano yOz . Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

- (A) A recta r é perpendicular ao plano xOy
- (B) A recta r está contida no plano xOy
- (C) A recta r é perpendicular ao eixo Ox
- (D) A recta r é paralela ao eixo Ox

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica S , de equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 2$. Qual das equações seguintes define um plano cuja intersecção com a superfície esférica não é vazia?

(A) $x = -1$ (B) $x = 0$ (C) $x = 3$ (D) $x = 4$

7. Considere, num referencial o.n. xOy , a elipse E , de equação $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Qual das equações seguintes define uma elipse geometricamente igual à elipse E ?

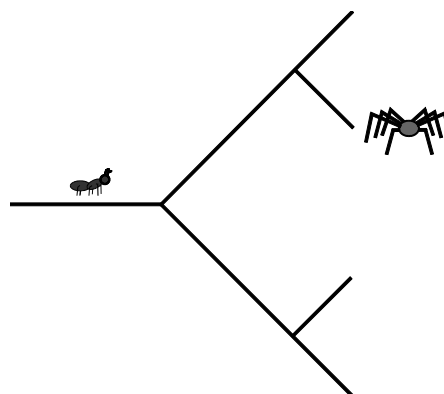
(A) $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(C) $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

8. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número. Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142. Quantos desses números são múltiplos de 5?

(A) 12 (B) 24 (C) 60 (D) 120

9. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações. A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda. Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?



(A) 0,14 (B) 0,21 (C) 0,42 (D) 0,49

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

- 1.** Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar. Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água. Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50 e^{-0,02t}, \quad t \geq 0$$

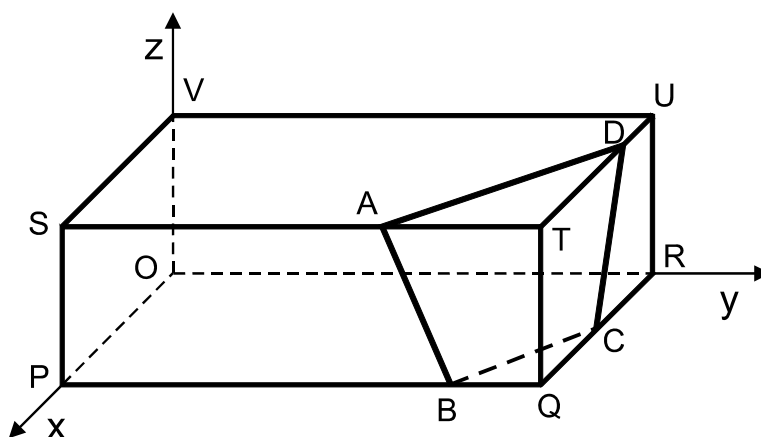
- 1.1.** Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**. Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.
- 1.2.** Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.
- 2.** Considere a função f , de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1,2 + \operatorname{tg} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(\ln designa *logaritmo* de base e).

- 2.1.** Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.
- 2.2.** Recorrendo ao estudo analítico da segunda derivada, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]1, +\infty[$.
- 2.3.** Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]2, 3[$, pelo menos uma solução.

- 3.** Um saco contém seis bolas, três verdes e três azuis.
- 3.1.** Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco. Qual é a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
- 3.2.** Considere agora que todas as bolas estão novamente no saco. Extraem-se, ao acaso, uma a uma, e sem reposição, as seis bolas do saco. À medida que as bolas vão sendo retiradas do saco, vão sendo dispostas em cima de uma mesa, em fila, da esquerda para a direita. Qual é a probabilidade de as três bolas azuis ficarem juntas? Apresente o resultado na forma de percentagem.
- 4.** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um paralelepípedo rectângulo $[OPQRSTUV]$.



Os pontos P , R e V pertencem aos semieixos positivos Ox , Oy e Oz , respectivamente.

O quadrilátero $[ABCD]$ é a secção obtida no paralelepípedo pelo plano de equação $2x + 3y + z = 22$, que é perpendicular à recta OT .

O ponto R tem ordenada 6.

- 4.1.** Justifique que o ponto T tem coordenadas $(4, 6, 2)$
- 4.2.** Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q .
- 4.3.** Determine as coordenadas do ponto D .

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... 81

| | |
|--|-----|
| Cada resposta certa | +9 |
| Cada resposta errada..... | - 3 |
| Cada questão não respondida ou anulada | 0 |

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1. 26

1.1. 10

1.2. 16

2. 35

2.1. 7

2.2. 14

2.3. 14

3. 22

3.1. 11

3.2. 11

4. 36

4.1. 12

4.2. 12

4.3. 12

TOTAL200