EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$

(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$

(C) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

(D) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$?
($\ln$ designa logaritmo de base e)

(A) $2\,a$ **(B)** $2+a$ **(C)** 2^a **(D)** a^2

3. A recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

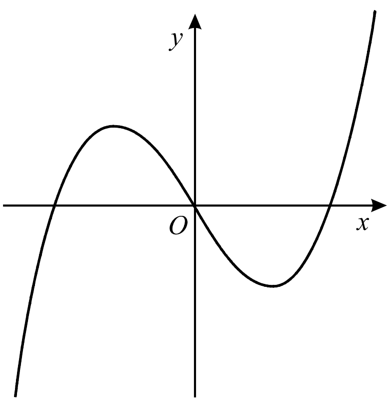
(A) x^2+x **(B)** $x^2+2\,x$ **(C)** $x^2+2\,x+1$ **(D)** x^2+x+1

4. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua **segunda derivada** é definida por

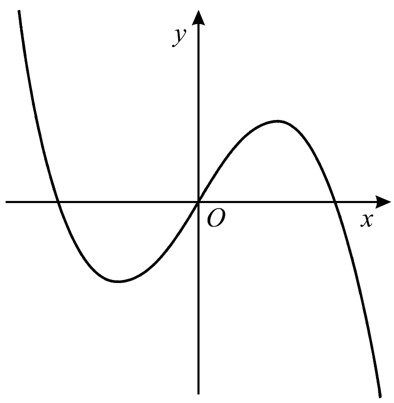
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função g**?

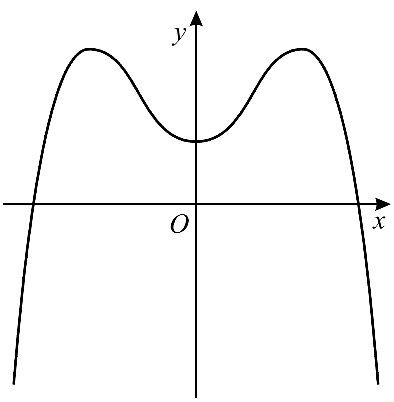
(A)



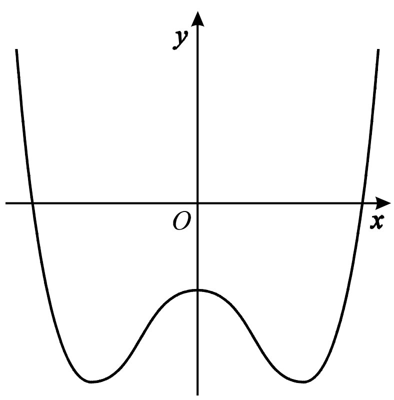
(B)



(C)



(D)



5. Qual das seguintes equações define, num referencial o. n. $Oxyz$, uma superfície esférica tangente aos planos de equações $x = 4$ e $y = 0$?

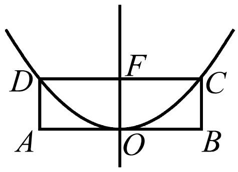
(A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$

(B) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$

(C) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

(D) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$

6. Na figura está representada parte de uma parábola, bem como um rectângulo $[ABCD]$.

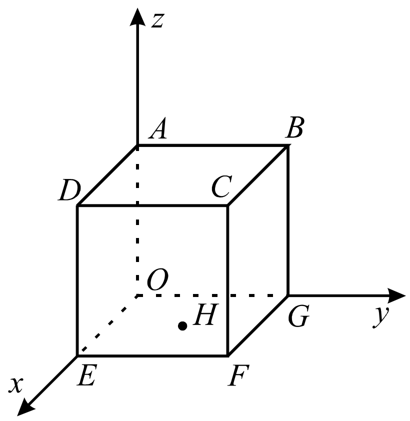


- D , C e O são pontos da parábola
- $[DC]$ contém o foco F da parábola e é perpendicular ao eixo de simetria OF
- $\overline{OF} = 1$

Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6

7. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cubo.



- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice A pertence ao eixo Oz
- O vértice G pertence ao eixo Oy
- O vértice E pertence ao eixo Ox
- H é o centro da face $[OGFE]$
- Uma equação do plano que contém os pontos D, B e H é $x + y = 10$

Qual é a medida da aresta do cubo ?

(A) 5 **(B)** 10 **(C)** $5\sqrt{2}$ **(D)** $10\sqrt{2}$

8. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

(A) 300 **(B)** 400 **(C)** 500 **(D)** 600

9. **Quantas** são as soluções da equação $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + x + 1$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

V.S.F.F.

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes.

1.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

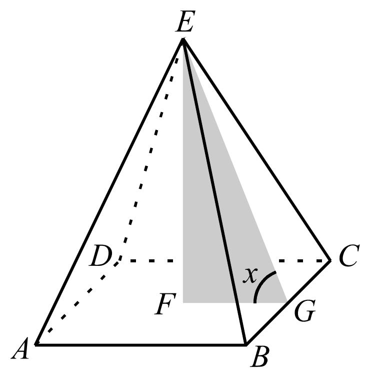
1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o triplo da abcissa. Determine a abcissa desse ponto.

2. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE



2.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

2.2. Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.

Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.

Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

3.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?

Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

3.2. Admita que as quinze bolas são novamente colocadas no saco.

Extraindo simultaneamente três bolas, ao acaso, qual é a probabilidade de elas terem cores e números diferentes?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, duas rectas, r e s, de equações

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ e $(x,y,z) = (1,\,-1,0) + k\,(2,1,\,-1)$, $k \in \mathbb{R}$,

respectivamente.

4.1. Justifique que as rectas r e s definem um plano.

4.2. Mostre que o plano definido pelas rectas r e s é paralelo ao plano de equação $x - y + z = 10$

4.3. Determine a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s.
Apresente o resultado em graus, aproximado às unidades.
Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
- **1.1.** 12
- **1.2.** 13
- **1.3.** 12

2. 24
- **2.1.** 12
- **2.2.** 12

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**