

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2001

Prova Modelo

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

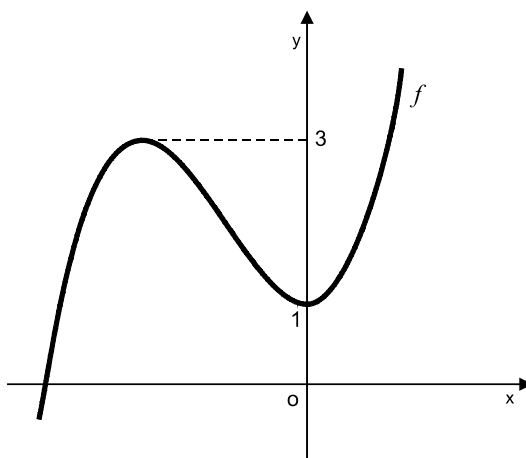
A Prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

- (A) uma (B) duas (C) três (D) quatro
2. Considere a função h definida em \mathbb{R} por $h(x) = \sin x$
- Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?
- (A) $y = 2x + \pi$ (B) $y = -2$
(C) $y = \sqrt{2}x - 9$ (D) $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

- (A) 2 dm (B) 4 dm (C) 6 dm (D) 8 dm

4. Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

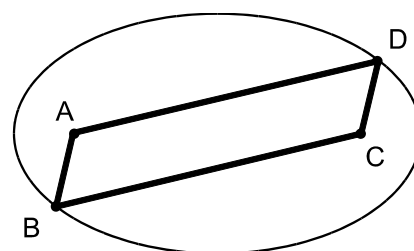
- (A) A recta s é tangente ao gráfico de f
(B) A recta s é secante ao gráfico de f
(C) A recta s não intersecta o gráfico de f
(D) A recta s é uma assíptota do gráfico de f

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo $[ABCD]$.

Os vértices A e C são os focos da elipse.

Os vértices B e D são pontos da elipse.

O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20

6. Considere um vector \overrightarrow{AB} tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$?

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$.

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$

(B) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$

(C) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$

(D) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

- (A) 36 (B) 120 (C) 12 (D) 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{5}{36}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{5}{18}$

Grupo II

Nas questões do segundo grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

- 1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

- 1.2. Seja f' a função derivada de f . Mostre que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f , cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

- 1.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[3\pi, 4\pi]$. Determine-a.

2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101 e^{-0,12h}$$

- 2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



- 2.2. Determine x tal que, para qualquer h , $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto desta igualdade.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

- 3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

- 3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

O vértice O é a origem do referencial

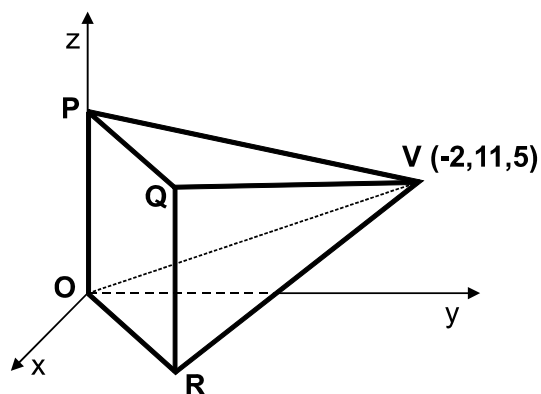
O vértice P pertence ao eixo Oz

O vértice R pertence ao plano xOy

O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é

$$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0), k \in \mathbb{R}$$



- 4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$

- 4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

- 4.3. Determine o volume da pirâmide.

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I81

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II119

1. 37

1.1.	11
1.2.	13
1.3.	13

2. 24

2.1.	10
2.2.	14

3. 22

3.1.	11
3.2.	11

4. 36

4.1.	12
4.2.	12
4.3.	12

TOTAL200