EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
1998 — **1.ª CHAMADA**
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

Para cada uma das nove questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta, de entre as alternativas que lhe são apresentadas, e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
Cotação: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

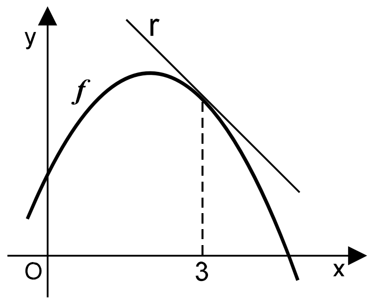
1. O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ é

(A) 1 **(B)** $+\infty$ **(C)** $\sqrt{e}$ **(D)** e^2

2. Na figura estão representadas:

• parte do gráfico de uma função f diferenciável em $\mathbb{R}$
• uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3

O valor de $f'(3)$, derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a



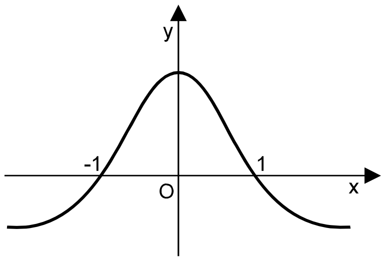
(A) -1 **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{f(3)}$ **(D)** 1

3. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:
• $g(0) = 1$
• g é estritamente crescente em $[0, +\infty[$
• g é par

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

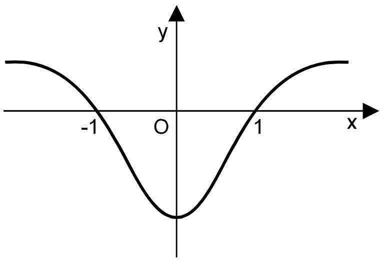
(A) O contradomínio de g é $[0, +\infty[$ **(B)** g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$
(C) g é injectiva **(D)** g não tem zeros

4. Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função s de domínio $\mathbb{R}$.

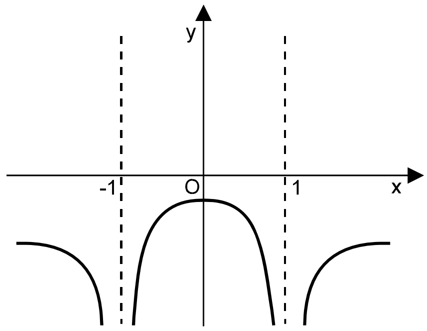


Indique qual das figuras seguintes pode ser parte da representação gráfica da função t definida por $t(x) = \dfrac{1}{s(x)}$

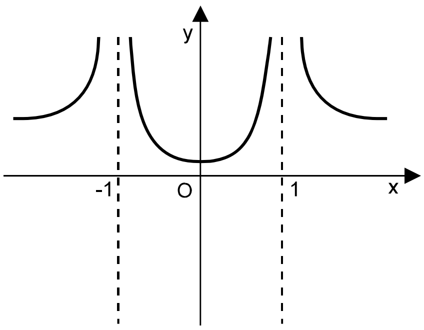
(A)



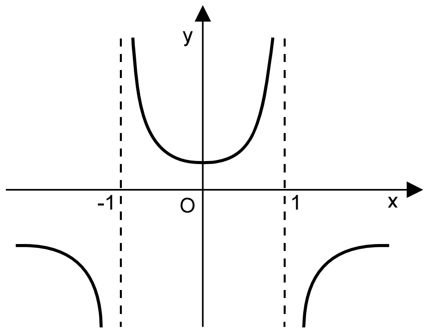
(B)



(C)



(D)



5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

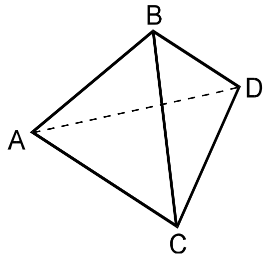
- a esfera $\mathcal{E}$ definida pela condição $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 36$
- a recta $\boldsymbol{r}$ de equação $(x,\, y,\, z) = (1, 2, 3) + k\,(\,-2, 0, 1)\,,\ k \in \mathbb{R}$

A intersecção da recta $\boldsymbol{r}$ com a esfera $\mathcal{E}$ é um segmento de recta.

Qual é o comprimento desse segmento de recta?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14

6. Na figura está representado um tetraedro regular (sólido geométrico com quatro faces, que são todas **triângulos equiláteros**).



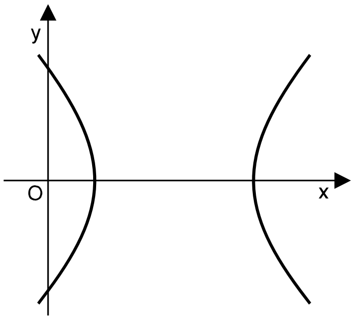
- A, B, C e D são os vértices do tetraedro
- $\overline{AB} = 6$

O valor do produto escalar $\overrightarrow{BC} \, . \, \overrightarrow{BD}$ é

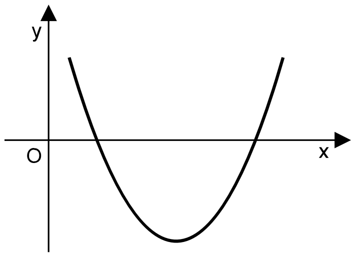
(A) 18 **(B)** $18\sqrt{2}$ **(C)** 36 **(D)** $36\sqrt{2}$

7. Considere, num referencial o.n. xOy, os pontos $A(2,\, 0)$ e $B(6, 0)$.
Indique qual das figuras seguintes pode representar o conjunto de pontos P do plano tais que $\overline{PA} + \overline{PB} = 5$.

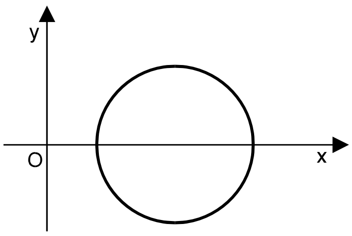
(A)



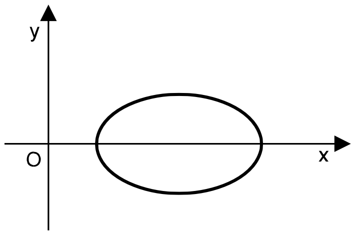
(B)



(C)



(D)



8. O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10.
Qual é o terceiro número dessa linha?

(A) 11 **(B)** 19 **(C)** 45 **(D)** 144

9. Um dado é lançado cinco vezes.
Qual é a probabilidade de que a face *seis* apareça pelo menos uma vez?

(A) $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^5$ **(B)** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ **(C)** $C_1^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5$ **(D)** $C_1^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: pode ser-lhe útil consultar o formulário apresentado no final da prova.

1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = log_2(8x^2) - log_2 x$

a) Mostre que $f(x) = 3 + log_2 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$

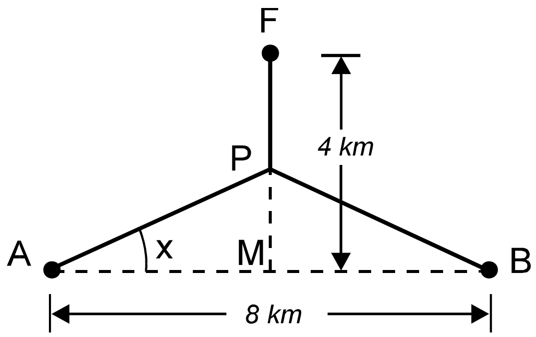
b) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta de equação $y = 8$

2. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura abaixo. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.

Tem-se ainda que:

- o ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F
- x é a amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$



a) Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4\,sen\,x}{cos\,x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{cos\,x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$)

b) Calcule $g(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

3. Uma turma de uma escola secundária tem 27 alunos: 15 raparigas e 12 rapazes.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se constituir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que um dos 3 rapazes da comissão será necessariamente o delegado de turma.

a) Quantas comissões diferentes se podem constituir?

b) Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

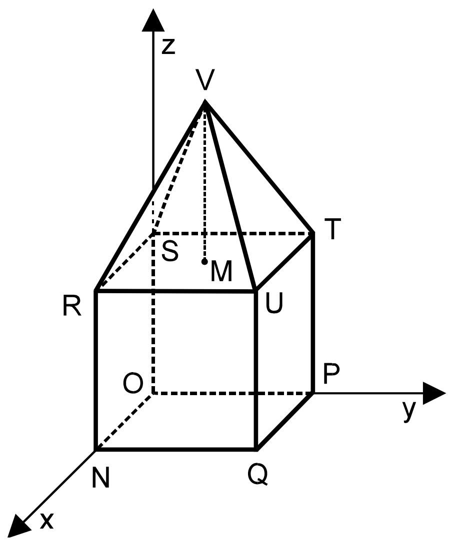
4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide coincide com a face superior do cubo

- O vértice O coincide com a origem do referencial
- O vértice N pertence ao semieixo positivo Ox
- O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz

- A altura da pirâmide, $\overline{VM}$, é igual ao comprimento da aresta do cubo

- O vértice V tem coordenadas $(3, 3, 12)$



a) Justifique que $\overline{UQ} = 6$ e que $\overline{UV} = 3\sqrt{6}$

b) Determine a intersecção da recta que contém a aresta $[UV]$ com o plano de equação $x = 4$

c) Considere um ponto A pertencente à aresta $[UQ]$.
Um plano que contenha o ponto A e que seja paralelo ao plano xOy divide o sólido representado na figura em duas partes.
Determine a cota do ponto A de modo que sejam iguais os volumes dessas duas partes.

Formulário

Volume da pirâmide = $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..**81**

Cada questão certa .... +9
Cada questão errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1 22
a) 11
b)...11

2 39
a) 12
b)...12
c)...15

3 22
a) 10
b)...12

4 36
a) 12
b)...12
c)...12

TOTAL **200**