EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **ÉPOCA ESPECIAL**
2000 **(SETEMBRO)**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 8 deste enunciado encontra-se um formulário.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de uma função de domínio $\mathbb{R}$?

(A) $\operatorname{tg} x$ **(B)** $\ln x$ **(C)** $\frac{x-1}{e^x}$ **(D)** $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, estritamente decrescente.

Os eixos coordenados são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \frac{1}{n}$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

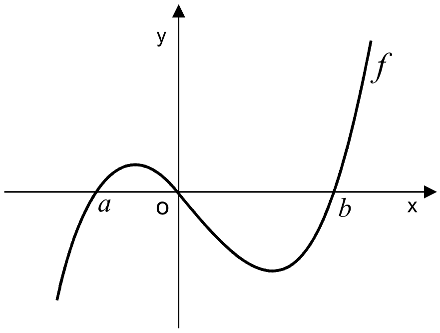
(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

3. Seja g uma função tal que o gráfico de g'' (segunda derivada de g) é uma recta de declive positivo que intersecta o eixo Oy no ponto $(0, 1)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

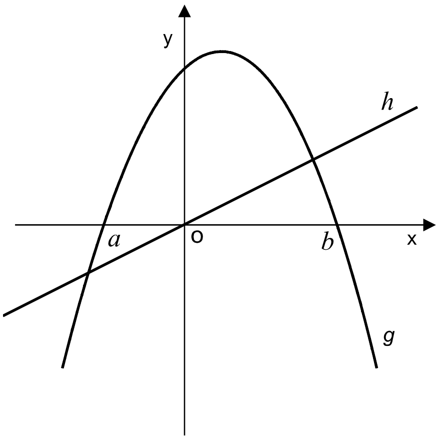
(A) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa positiva
(B) O gráfico de g tem um ponto de inflexão de abcissa negativa
(C) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$
(D) O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

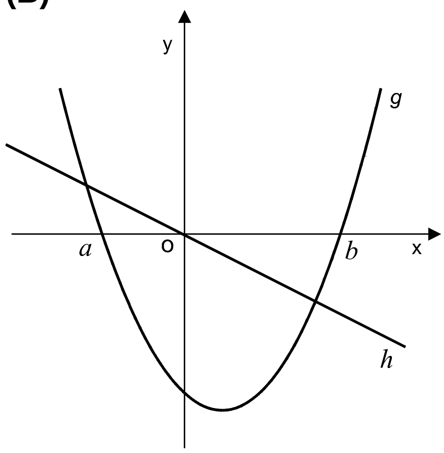


Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, g e h, de domínio $\mathbb{R}$, tais que $f = g \times h$?

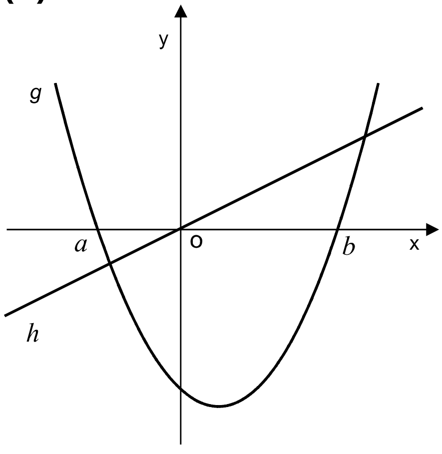
(A)



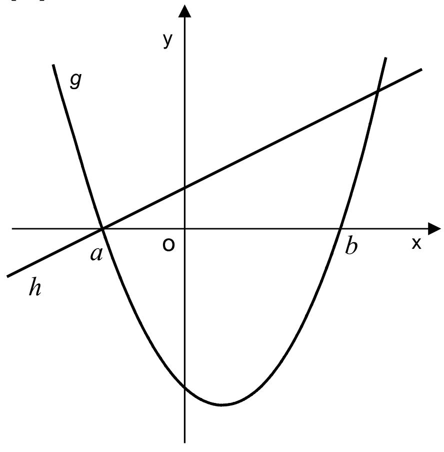
(B)



(C)



(D)



5. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem quinze elementos.

Qual é o sexto elemento dessa linha?

(A) ${}^{14}C_5$

(B) ${}^{15}C_5$

(C) ${}^{14}C_6$

(D) ${}^{15}C_6$

6. A Sandra tem dez fichas de plástico, três das quais são verdes, sendo as restantes vermelhas. A Sandra empilha as dez fichas, aleatoriamente, umas em cima das outras.

Qual é a probabilidade de as três fichas verdes ficarem em cima?

(A) $\dfrac{{}^{10}C_3}{{}^{10}A_3}$

(B) $\dfrac{1}{{}^{10}A_3}$

(C) $\dfrac{3!}{10!}$

(D) $\dfrac{3!\times 7!}{10!}$

7. Seja z um número complexo de argumento $\dfrac{9\pi}{5}$

Indique um argumento de $\overline{z}$, conjugado de z.

(A) $\dfrac{\pi}{5}$

(B) $\dfrac{3\pi}{5}$

(C) $\dfrac{4\pi}{5}$

(D) $\dfrac{6\pi}{5}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere o número complexo $z = 1 + 2\,i$

1.1. Sabe-se que z é uma raiz cúbica de um certo número complexo w.
Sem recorrer à calculadora, determine w, na forma algébrica.

1.2. Designando por α um argumento de z, determine, na forma trigonométrica, o número complexo $i\,z^2$, apresentando o argumento em função de α.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & se\ x < 0 \\ \operatorname{sen}(2\,x) - \cos x & se\ x \geq 0 \end{cases}$

2.1. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais ao seu gráfico.

2.1.2. Verifique se a função f tem máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.

2.1.3. Determine os zeros de f no intervalo $]-3, 3[$.

2.2. Recorrendo à sua calculadora, determine as soluções **inteiras** da inequação $f(x) > x - 4$ pertencentes ao intervalo $[-6, 6]$. Explique como procedeu.

3. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \dfrac{d^2}{100}$

(d é medida em *parsec*, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias.)

3.1. A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$, sendo a sua magnitude absoluta $M = -4{,}6$.

Qual é a distância da Terra à Estrela Polar? (Apresente o resultado em *parsec*, arredondado às unidades.)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3.2. Prove que, para quaisquer m, M e d, se tem: $m = M - 5\left(1 - \log_{10} d\right)$

4. O João e a irmã Alice querem telefonar a um amigo.

Ele lembra-se de que o número de telefone do amigo começa por 21 e tem mais sete algarismos: um 3, dois 5, dois 7, dois 8.

4.1. Quantos números existem nestas condições?

4.2. A Alice também se lembra de que o número de telefone do amigo termina em 857. Se eles digitarem ao acaso os restantes quatro algarismos, qual é a probabilidade de acertarem à primeira tentativa? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 61
- **2.1.** 45
  - **2.1.1.** 13
  - **2.1.2.** 17
  - **2.1.3.** 15
- **2.2.** 16

3. 23
- **3.1.** 8
- **3.2.** 15

4. 32
- **4.1.** 16
- **4.2.** 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\; cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\,.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'\,.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,.\,e^u$

$(a^u)' = u'\,.\,a^u\,.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$