EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª Fase**
2000 — **1.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 0$

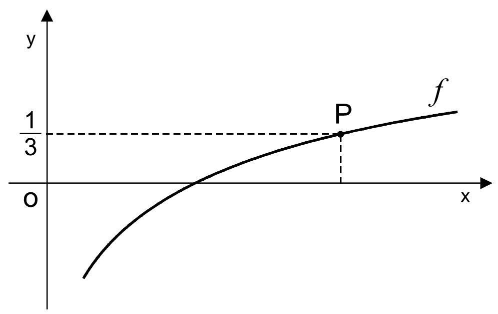
(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = 1$

(D) Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

2. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f, que tem ordenada $\frac{1}{3}$



Qual é a abcissa do ponto P ?

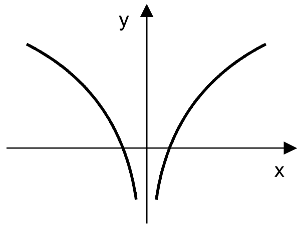
(A) $\frac{8}{3}$

(B) 1

(C) $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

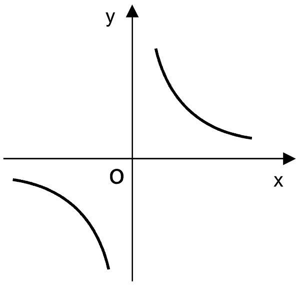
(D) 2

3. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

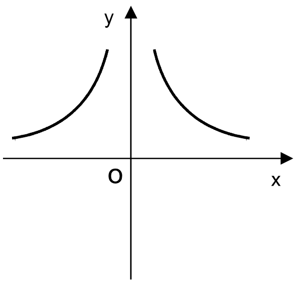


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g ?

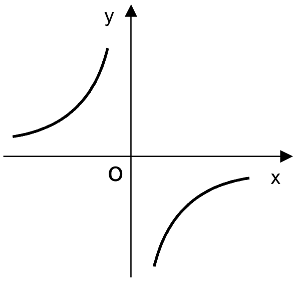
(A)



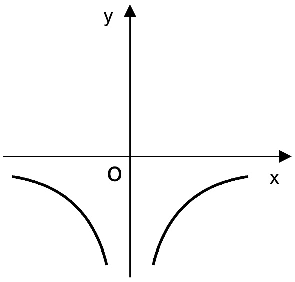
(B)



(C)



(D)



4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com $7\ m$ de comprimento, $5\ m$ de largura e $4\ m$ de altura.

Admita que o tanque está vazio.

Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de $2\ m^3$ por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2\,t\ ,\ \ t \in [\,0, 70\,]$

(B) $h(t) = \dfrac{2\,t}{35}\ ,\ \ t \in [\,0, 70\,]$

(C) $h(t) = 4 - 2\,t\ ,\ \ t \in [\,0, 140\,]$

(D) $h(t) = \dfrac{2\,t}{35}\ ,\ \ t \in [\,0, 140\,]$

5. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|A)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $P(A)$ **(D)** $[P(A)]^2$

6. Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6.
Considere os acontecimentos:
A: «sair face ímpar»;
B: «sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

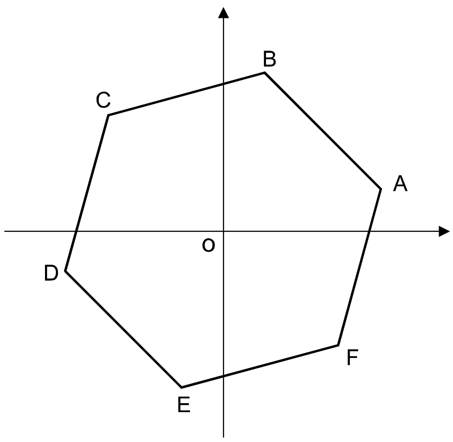
(A) sair a face 1 ou a face 5

(B) sair a face 4 ou a face 6

(C) sair a face 2

(D) sair a face 5

7. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2}\ cis\,\frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

(A) $\sqrt{2}\ cis\,\frac{7\pi}{6}$

(B) $\sqrt{2}\ cis\,\frac{13\pi}{12}$

(C) $\sqrt[6]{2}\ cis\,\frac{7\pi}{6}$

(D) $\sqrt[6]{2}\ cis\,\frac{13\pi}{12}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja A o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

1.1. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a parte de A contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

1.2. Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4\,cis\,\frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto A.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x\,(x^2 + x)$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Verifique que $f\,'(x) = e^x\,(x^2 + 3\,x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

2.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \text{ sen } \frac{\pi\,(n-81)}{183} \qquad n \in \{1, 2, 3, ..., 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10{,}3$ horas.

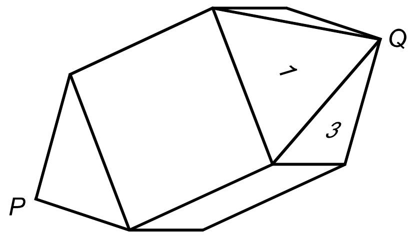
3.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a $14{,}7$ horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

4. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



4.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).

Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

4.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

4.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

4.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice P coincida com a origem do referencial, e o vértice Q esteja no semieixo positivo Oy.

Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assimptota do gráfico de f. Mostre que o gráfico da função $\dfrac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
- **1.1.** 9
- **1.2.** 12

2. 33
- **2.1.** 15
- **2.2.** 18

3. 33
- **3.1.** 15
- **3.2.** 18

4. 32
- **4.1.** 18
  - **4.1.1.** 7
  - **4.1.2.** 11
- **4.2.** 14

5. 18

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln\,a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$