

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
 Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
 2000

1.ª FASE  
 2.ª CHAMADA

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### COTAÇÕES

**Primeira Parte..... 63**

Cada resposta certa ..... +9  
 Cada resposta errada..... - 3  
 Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte ..... 137**

1. .... 21  
     1.1. .... 11  
     1.2. .... 10

2. .... 50  
     2.1. .... 17  
     2.2. .... 15  
     2.3. .... 18

3. .... 34  
     3.1. .... 16  
     3.2. .... 18

4. .... 32  
     4.1. .... 16  
     4.2. .... 16

**TOTAL .....200**

V.S.F.F.

435/C/1

---

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	D	B	B	C	A	B
Versão 2	D	A	D	C	B	D	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

### Segunda Parte

#### **Critérios gerais**

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

**Critérios específicos**

**1.1. .... 11**

$$\frac{(1-i)^2}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} = 1 \dots\dots\dots 5$$

$$\frac{(1-i)^2}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} = \frac{1-2i+i^2}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 1$$

$$= \frac{-2i}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 1$$

$$= \frac{-2i}{-2i} \dots\dots\dots 2$$

$$= 1 \dots\dots\dots 1$$

ou

$$\frac{(1-i)^2}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} = \frac{(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4})^2}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 2$$

$$= \frac{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}{2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}} \dots\dots\dots 2$$

$$= 1 \text{ (ou } \operatorname{cis} 0) \dots\dots\dots 1$$

**Conclusão ..... 6**

$$\sqrt[4]{\operatorname{cis} 0} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3 \dots\dots\dots 2$$

As raízes quartas de 1 são  $1, i, -1, -i$  ..... 2

Identificação de  $1, i, -1, -i$  com os vértices do quadrado  $[ABCD]$  ..... 2

ou

Identificação de  $1, i, -1, -i$  com os vértices do quadrado  $[ABCD]$  ..... 2

$$1^4 = i^4 = (-1)^4 = (-i)^4 = 1 \dots\dots\dots 4$$

**V.S.F.F.**

435/C/3

1.2. .... 10

Determinar o raio da circunferência (ver nota).....5

Escrever a condição  $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (ou outra equivalente) .....5

**Nota:**

Indicam-se a seguir quatro processos possíveis para obter o raio da circunferência, com os respectivos desdobramentos dos 5 pontos:

Lado do quadrado =  $\sqrt{2}$  .....3

Raio da circunferência =  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  .....2

ou

$x^2 + x^2 = 1$  ( $x$  é o raio da circunferência)..... 3

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 2

ou

$\text{sen } 45^\circ = \frac{x}{1}$  ( $x$  é o raio da circunferência).....3

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 2

ou

Raio da circunferência =  
= Distância da origem ao ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ..... 3

Raio da circunferência =  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  .....2

**2.1. .... 17**

$f'(x) =$

$= \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$  ..... 3

$= \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$  ..... 2

Determinar o zero de  $f'$  ..... 2

Estudar o sinal de  $f'$  ..... 4

Concluir que  $f$  é decrescente em  $] - \infty, 1 [$  e em  $]1, 2 [$  (**ver nota**)..... 3

Concluir que  $f$  é crescente em  $[2, + \infty [$  ..... 2

Concluir que  $f$  tem mínimo relativo para  $x = 2$  ..... 1

**Nota:**  
 Se o examinando escrever que  $f$  é decrescente em  $] - \infty, 1 [ \cup ]1, 2 [$  ou em  $] - \infty, 2 [$ , deverá ter, neste passo, a cotação de zero pontos.

**2.2. .... 15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

Para  $x > 1$ , tem-se:

$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x$  ..... 5

$\Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x$  ..... 4

$\Leftrightarrow \ln(x-1) = 0$  ..... 1

$\Leftrightarrow x-1 = 1$  ..... 4

$\Leftrightarrow x = 2$  ..... 1

**2.º Processo**

Para  $x > 1$ , tem-se:

$$\ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = e^x \dots\dots\dots 8$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \dots\dots\dots 6$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \dots\dots\dots 1$$

**Nota:**

Se, qualquer que seja o processo utilizado, o examinando não referir que as equivalências são válidas apenas para  $x > 1$ , ou não verificar que 2 é, efectivamente, solução da equação, deverá ser penalizado em 2 pontos.

**2.3. .... 18**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ e/ou } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ (ver nota 1) } \dots\dots\dots 3$$

Concluir que a recta de equação  $x = 1$  é assíptota vertical do gráfico de  $f$  ..... 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (ver nota 2) } \dots\dots\dots 3$$

Concluir que não existe assíptota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ (ver nota 3) } \dots\dots\dots 3$$

Concluir que a recta de equação  $y = 0$  é assíptota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 3

**Notas:**

1. O examinando só tem de indicar o valor de um dos limites; no entanto, se determinar ambos os limites e se enganar num deles, deverá ser cotado com 2 dos 3 pontos.

2. O examinando pode determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , em vez de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , e, verificando que o limite é  $+\infty$ , concluir, correctamente, que não existe assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$

3. O examinando pode:

- começar por determinar  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- concluir que  $m = 0$
- determinar, em seguida,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Se o examinando optar por este processo, os 3 pontos previstos para o cálculo de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ..... 2

$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  ..... 1

**3.1. .... 16**

Substituir  $x$  por  $180^\circ$  (ver notas 1 e 2) ..... 6

$\cos 180^\circ = -1$  ..... 2

Distância do satélite (no apogeu) ao centro da Terra ..... 3

Distância pedida (ver nota 3)..... 5

**Notas:**

1. Apesar de, no enunciado, se explicitar que se considera o grau como unidade de medida do ângulo  $x$ , não deve ser penalizada a eventual substituição de  $x$  por  $\pi$  (radianos), na fórmula que relaciona as variáveis  $x$  e  $d$ .

**V.S.F.F.**

435/C/7

2. Pode acontecer que o examinando não se aperceba da seguinte evidência geométrica: o satélite está no *apogeu* se e só se  $x = 180^\circ$ .

Nesse caso, o examinando poderá começar por derivar a função definida pela expressão  $\frac{7820}{1+0,07 \cos x}$ , para então concluir que é para  $x = \pi$  (radianos) que a função é máxima.

A derivação da função deve ser valorizada em 3 pontos.

A conclusão de que a função é máxima para  $x = \pi$  (radianos) deve receber mais 3 pontos, perfazendo, assim, a cotação prevista para a substituição de  $x$  por  $180^\circ$  (6 pontos).

3. O examinando poderá, com recurso à calculadora gráfica, determinar o valor pedido (determinando graficamente o máximo de  $\frac{7820}{1+0,07 \cos x}$  e subtraindo 6378 ao valor obtido, ou determinando directamente o máximo de  $\frac{7820}{1+0,07 \cos x} - 6378$ ).

Nesse caso, o examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

Valor obtido correcto (2031) .....	16
Valor obtido igual a 2030 .....	14
Valor obtido igual a 2029 ou a 2032 .....	8
Outros valores inteiros .....	0

Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 15 pontos.



Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

Equacionar o problema  $\left( \frac{7820}{1+0,07 \cos x} = 8200 \right)$  .....4

$\cos x = -0,662$  .....4

Conclusão:  $x \approx 229^\circ$  (ver notas 1 e 4) ..... 10

**2.º Processo**

Equacionar o problema (ver nota 2) .....4

Resolver a equação graficamente e concluir que  $x \approx 229^\circ$  (ver notas 3 e 4) ..... 14

**Notas:**

1. Se o examinando indicar apenas a outra solução da equação  $\cos(x) = -0,662$ , no intervalo  $[0^\circ, 360^\circ]$ , que é  $131^\circ$ , deverá ser cotado em 3 dos 10 pontos previstos para a conclusão.  
Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação,  $131^\circ$  e  $229^\circ$ , e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para a conclusão.
2. Se o examinando não escrever esta equação, mas, na sua resposta, existir evidência de que ele procura graficamente a solução da mesma, estes 4 pontos deverão ser-lhe atribuídos.
3. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a utilização da calculadora na procura do valor pedido. Tal pode ser feito reproduzindo ou descrevendo o rectângulo de visualização da calculadora.

A cotação **máxima** a atribuir **deverá ter em conta o grau de precisão do valor obtido**, de acordo com o seguinte critério:

Valor obtido correcto ( $229^\circ$ ) .....	14
Valor obtido igual a $228^\circ$ .....	12
Valor obtido igual a $227^\circ$ ou a $230^\circ$ .....	8
Outros valores inteiros .....	0

Se o examinando, utilizando este processo (gráfico), indicar apenas a outra solução ( $131^\circ$ ), deverá ser cotado, no máximo, em 4 dos 14 pontos previstos para a conclusão.

**V.S.F.F.**

435/C/9

Se o examinando indicar as duas soluções da referida equação,  $131^\circ$  e  $229^\circ$ , e não referir que apenas a segunda corresponde à posição do satélite indicada no enunciado, deverá ser cotado, no máximo, em 7 dos 14 pontos previstos para a conclusão.

4. Caso o examinando não apresente o resultado final arredondado às unidades, deverá ter a cotação máxima de 17 pontos.

**4.1. .... 16**

Sejam os acontecimentos:

$E$  – o iogurte está estragado

$D$  – o iogurte está dentro do prazo de validade

$\bar{D}$  – o iogurte está fora do prazo de validade

A forma de apresentar a resolução deste exercício pode ser feita por, pelo menos, dois processos:

**1.º Processo**

$P(E) = P(E \cap D) + P(E \cap \bar{D})$  ..... 1

$P(E \cap D) = P(E|D) \times P(D)$  ..... 1

$P(E \cap \bar{D}) = P(E|\bar{D}) \times P(\bar{D})$  ..... 1

$P(E) = 0,005 \times 0,8 + 0,65 \times 0,2$  ..... 12

$P(E|D) = 0,005$  ..... 3

$P(D) = 0,8$  ..... 3

$P(E|\bar{D}) = 0,65$  ..... 3

$P(\bar{D}) = 0,2$  ..... 3

$P(E) = 0,134$  ..... 1

**2.º Processo**

Construção e preenchimento de uma tabela de dupla entrada

$(E, \bar{E}$  por  $D, \bar{D})$  ou de um diagrama em árvore (**ver nota 1**)..... 12

$P(E \cap D) = 0,005 \times 0,8$  (**ver nota 2**)..... 6

$P(E \cap \bar{D}) = 0,65 \times 0,2$  (**ver nota 3**)..... 6

$P(E) = 0,134$  ..... 4

**Notas:**

1. Não se exige o preenchimento de toda a tabela (ou de todo o diagrama). Apenas são necessárias as probabilidades  $P(E \cap D)$  e  $P(E \cap \bar{D})$ .
2. Se o examinando interpretar erradamente  $P(E \cap D)$  como sendo  $P(E|D)$ , deverão ser atribuídos 3 ou 0 pontos, conforme exista, ou não, evidência de que o examinando concluiu que  $P(D) = 0,8$ .
3. Se o examinando interpretar erradamente  $P(E \cap \bar{D})$  como sendo  $P(E|\bar{D})$ , deverão ser atribuídos 3 ou 0 pontos, conforme exista, ou não, evidência de que o examinando concluiu que  $P(\bar{D}) = 0,2$ .

**4.2. .... 16**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

*Raciocínio do João:*

*Existem  ${}^{12}C_7$  maneiras diferentes de escolher os sete compartimentos onde se vão colocar os sete iogurtes.*

*Para cada selecção destes compartimentos, existem  ${}^7A_3$  maneiras diferentes de colocar neles os três iogurtes de frutas (dado que estes iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*

*Colocados os iogurtes de frutas, existe apenas uma maneira de colocar os quatro iogurtes naturais nos quatro lugares disponíveis.*

*Existem, assim,  ${}^{12}C_7 \times {}^7A_3$  maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.*

*Raciocínio da Joana:*

*Existem  ${}^{12}C_4$  maneiras diferentes de colocar os iogurtes naturais (dado que estes iogurtes são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*

*Colocados os iogurtes naturais, sobram oito compartimentos para colocar os três iogurtes de frutas. Portanto, para cada uma das maneiras de colocar os iogurtes naturais, existem  ${}^8A_3$  maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas na caixa (dado que estes iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).*

*Existem, assim,  ${}^{12}C_4 \times {}^8A_3$  maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.*

**V.S.F.F.**

435/C/11

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

<b>Forma</b> <b>Conteúdo</b>	<b>Nível 1 (*)</b>	<b>Nível 2 (*)</b>	<b>Nível 3 (*)</b>
O examinando explica completamente os dois raciocínios. <b>(ver nota)</b>	16	14	12
O examinando explica completamente um dos raciocínios e explica o outro parcialmente.	14	12	10
O examinando explica completamente um dos raciocínios.	12	10	8
O examinando explica parcialmente os dois raciocínios.	10	8	6
O examinando explica parcialmente um dos raciocínios.	8	6	4

(\*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

**Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

**Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

**Nota:**

Para que a explicação dos dois raciocínios se possa considerar completa, o examinando deve referir os seguintes aspectos:

No raciocínio do João:

- ${}^{12}C_7$  é o número de maneiras diferentes de escolher sete compartimentos de entre doze;
- ${}^7A_3$  é o número de maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas nos sete compartimentos seleccionados na etapa anterior (o examinando deverá referir que, como os três iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa);
- colocados os iogurtes de frutas em três dos sete compartimentos, existe apenas uma maneira de colocar os quatro iogurtes naturais nos quatro compartimentos disponíveis.

No raciocínio da Joana:

- ${}^{12}C_4$  é o número de maneiras diferentes de colocar os quatro iogurtes naturais nos doze compartimentos da caixa (o examinando deverá referir que, como os quatro iogurtes naturais são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa);
- ${}^8A_3$  é o número de maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de frutas nos oito compartimentos disponíveis (o examinando deverá referir que, como os três iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos nesses oito compartimentos).

Se o examinando não explicitar o porquê da multiplicação, não deverá ser penalizado. Por outras palavras: não se exige que o examinando utilize, na sua composição, uma expressão do tipo da que vem mencionada no exemplo de resposta: *para cada ....., existem .....* .

Como é referido no enunciado, o número de linhas sugerido para a composição (quinze a vinte) não tem carácter vinculativo. Por isso, o examinando não deverá ser penalizado se não seguir essa sugestão.

**V.S.F.F.**

435/C/13