PROVA 435/8 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Militares**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1,2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

2. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.
O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.
Indique o valor de a.

(A) $\ln 2$ **(B)** 2 **(C)** e^2 **(D)** $e + \ln 2$

3. De uma certa função g sabe-se que:

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty \qquad g(3) = 1 \qquad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 2$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

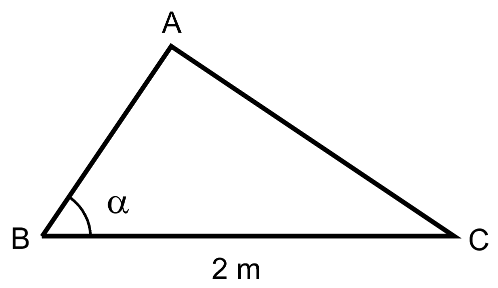
(A) O contradomínio da função g é o intervalo $[2, +\infty[$

(B) 3 não pertence ao domínio da função g

(C) A recta de equação $x = 3$ é assimptota do gráfico da função g

(D) Existe $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

4. Na figura está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\ m$.



Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

(A) $2 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$

(B) $2 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha$

(C) $4 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$

(D) $4 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha$

5. Um frigorífico tem cinco prateleiras.
Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.
De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^5C_3$

(B) ${}^5A_3$

(C) 5^3

(D) 3^5

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

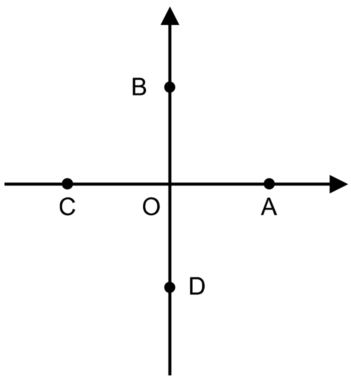
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura abaixo pode ser a imagem geométrica de z^4?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

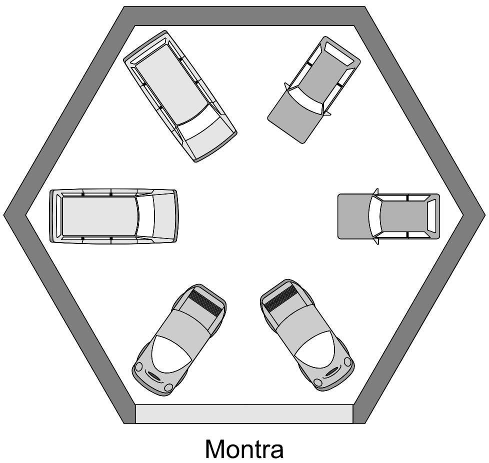
1.1.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis diferentes (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique voltado para um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem voltados para os vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \quad , \quad t \geq 0$$

2.1. Que percentagem da população de Malmequeres de Baixo testemunhou o acidente?

2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } \ x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{se } \ x = 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\,x} & \text{se } \ x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto).

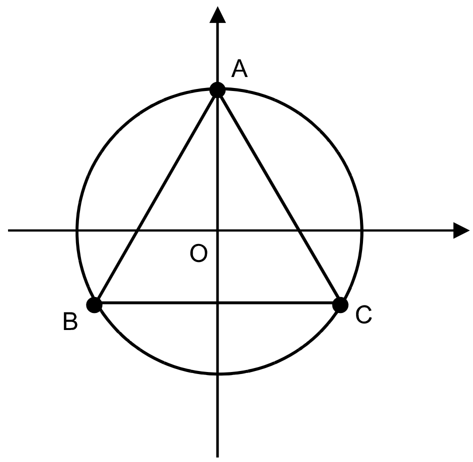
3.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{3\,x}$

Justifique que, no intervalo $[-1\,,\ 1000\,\pi]$, os gráficos de g e de h intersectam-se em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, arredondados às décimas).

4. Na figura junta está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

O ponto A é a imagem geométrica de $2\,i$.



4.1. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a referida circunferência.

4.2. Determine, na forma algébrica, o número complexo w cuja imagem geométrica é o ponto B.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 32
1.1. 20
1.1.1. 10
1.1.2. 10
1.2. 12

2. 35
2.1. 15
2.2. 20

3. 49
3.1. 33
3.1.1. 15
3.1.2. 18
3.2. 16

4. 21
4.1. 9
4.2. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta) \,.\, (\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\, (\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\, k\, \pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln\, a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O conjunto dos zeros de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, é $\{1, 2\}$.
Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \, . \, (x-3)^2$
Quais são os zeros da função h?

(A) $1, 2$ e 3 **(B)** $1, 4$ e 9

(C) $1, \sqrt{3}$ e 4 **(D)** $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$ e 2

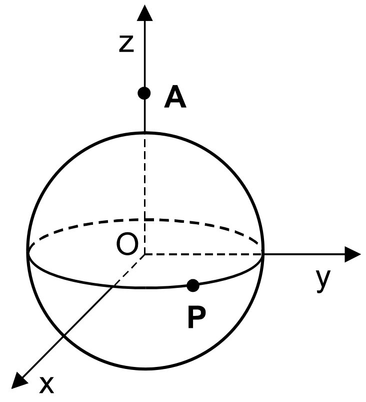
2. Indique o valor de $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\text{sen } x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

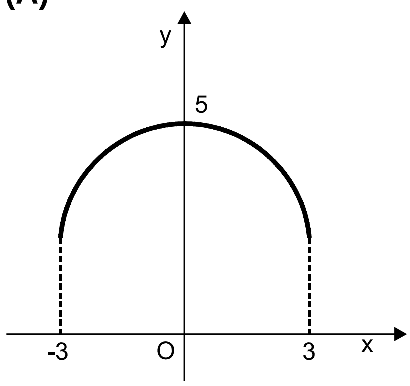
Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.



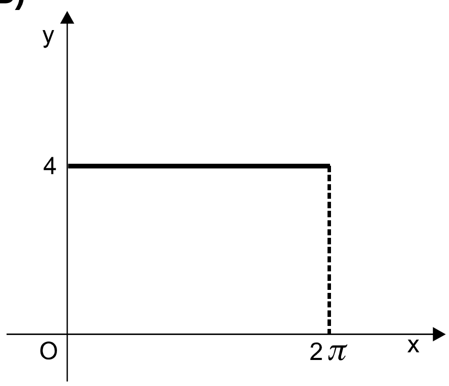
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

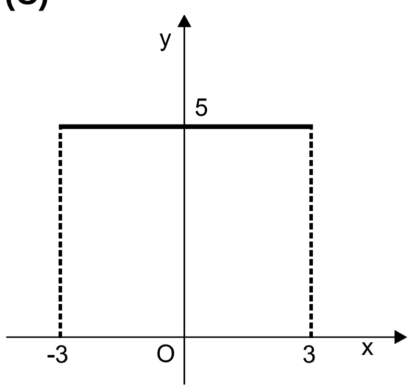
(A)



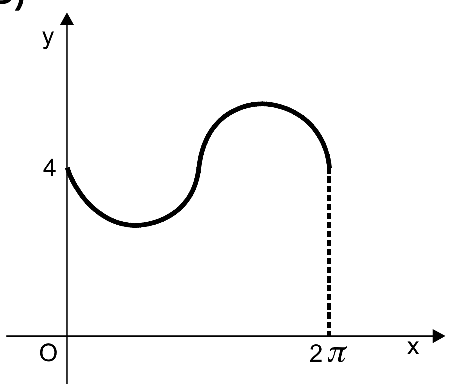
(B)



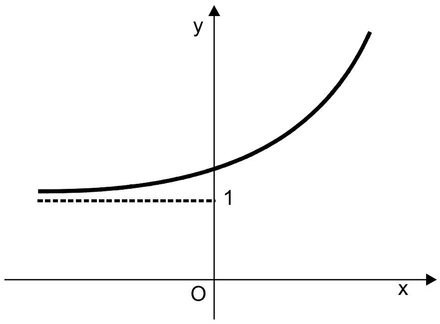
(C)



(D)

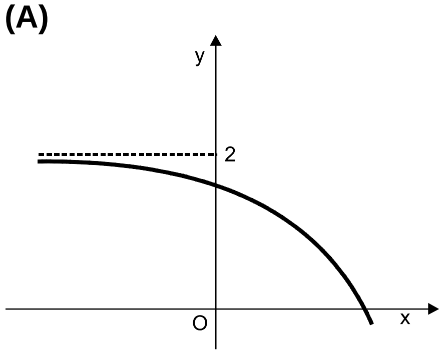


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

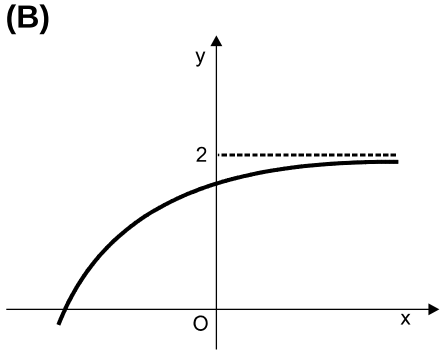


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

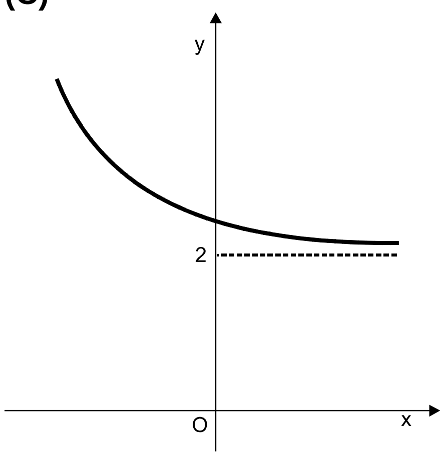
(A)



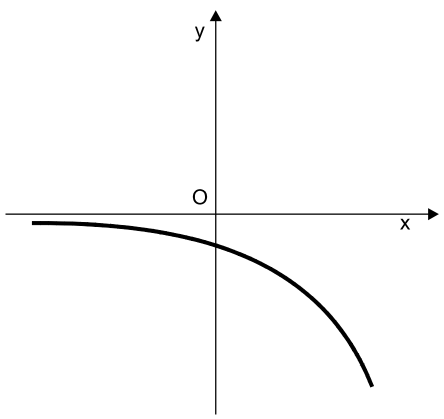
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa escola, a variável «*altura das alunas do 12.º ano de escolaridade*» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm

(B) A sua altura é inferior a 180 cm

(C) A sua altura é superior a 155 cm

(D) A sua altura é inferior a 155 cm

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

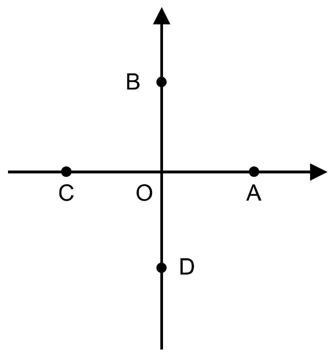
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4 ?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um stand de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis neste stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

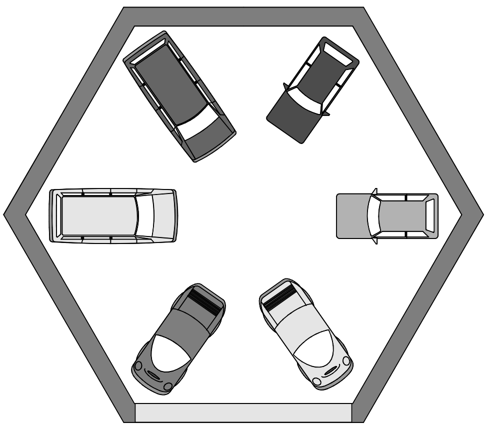
1.1.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. Este stand, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



2. Em Malmequeres de Baixo, povoação com **cinco mil** habitantes, ocorreu um acidente, que foi testemunhado por algumas pessoas.

Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabem do ocorrido é, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \ , \quad t \geq 0$$

2.1. Sabendo que o acidente ocorreu às sete e um quarto da manhã de um certo dia, mostre que, à meia-noite desse mesmo dia, mais de metade da população de Malmequeres de Baixo já sabia do ocorrido.

2.2. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\,x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função g é contínua nesse ponto, e no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{3\,x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\,,\ 1000\,\pi]$, os gráficos de g e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor **abcissa positiva**. Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, arredondados às décimas).

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24\,i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

4.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

4.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 32
- **1.1.** 20
  - **1.1.1.** 10
  - **1.1.2.** 10
- **1.2.** 12

2. 35
- **2.1.** 15
- **2.2.** 20

3. 49
- **3.1.** 33
  - **3.1.1.** 15
  - **3.1.2.** 18
- **3.2.** 16

4. 21
- **4.1.** 10
- **4.2.** 11

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln\, a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$