# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado**

**Duração da prova: 120 minutos**
**2001**

**Época Especial**
**Setembro**

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

**Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

**1.** Seja $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente.
Qual das seguintes afirmações é **necessariamente** verdadeira?

**(A)** A função $f$ não pode ter mais do que um zero.
**(B)** A função $f$ tem contradomínio $\mathbb{R}$.
**(C)** O gráfico da função $f$ tem a concavidade voltada para cima.
**(D)** O gráfico da função $f$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

**2.** Para um certo número real $a$, o gráfico da função $g$, definida por $g(x) = ax^2 + 3$, tem, no ponto de abcissa 1, uma recta tangente com declive $4$.

Qual é o valor de $a$?

**(A)** $4$ **(B)** $2$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

**3.** Considere uma função $h$, **contínua** em $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, tal que:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 5 \qquad \lim_{x \to -3} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

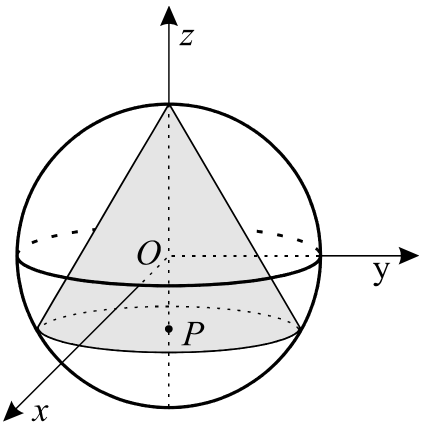
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

**(A)** O gráfico da função $h$ não tem assimptotas verticais.
**(B)** O gráfico da função $h$ não tem assimptotas horizontais.
**(C)** A função $h$ tem mínimo absoluto.
**(D)** A equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução.

**4.** Num referencial o. n. $Oxyz$, considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Um ponto $P$ desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo $Oz$.

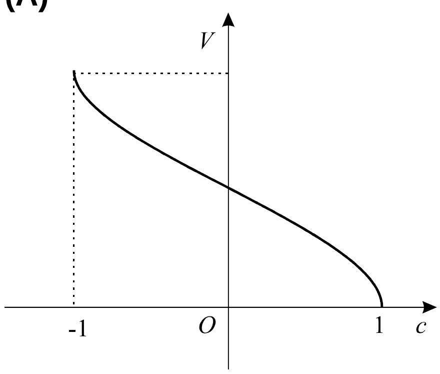
Para cada posição do ponto $P$, considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto $P$ e que tem por vértice o ponto $(0, 0, 1)$.



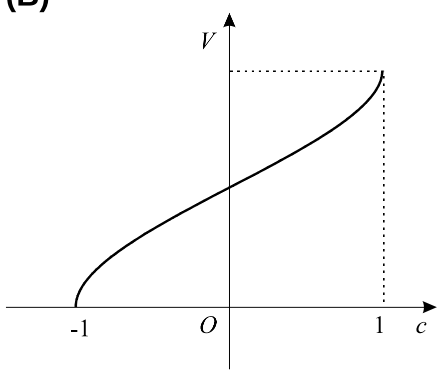

Seja $f$ a função que faz corresponder, à **cota** $c$ do ponto $P$, o **volume** $V$ do referido cone.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função $f$ ?

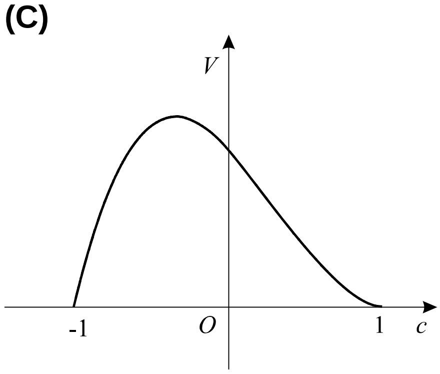
**(A)**



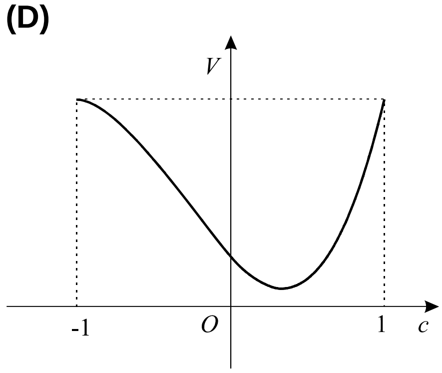

**(B)**




**(C)**




**(D)**



**5.** Uma estante tem oito prateleiras. Pretende-se expor, nessa estante, seis peças de porcelana: duas jarras iguais e quatro pratos diferentes.
De quantas maneiras podem ser expostas as seis peças nas oito prateleiras, de tal modo que não fique mais do que uma peça em cada prateleira?

**(A)** ${}^{8}C_2 \times {}^{6}A_4$ **(B)** ${}^{8}A_2 \times 4!$

**(C)** ${}^{8}C_2 \times {}^{8}A_4$ **(D)** ${}^{8}A_2 \times {}^{6}C_4$

**6.** Uma turma M tem sete rapazes e cinco raparigas.
Uma turma N tem seis rapazes e seis raparigas.
Escolhe-se, ao acaso, uma turma e, seguidamente, um elemento dessa turma.

Considere os acontecimentos:
$X$ : «a turma escolhida é a turma M»;
$Y$ : «o elemento escolhido é rapariga».

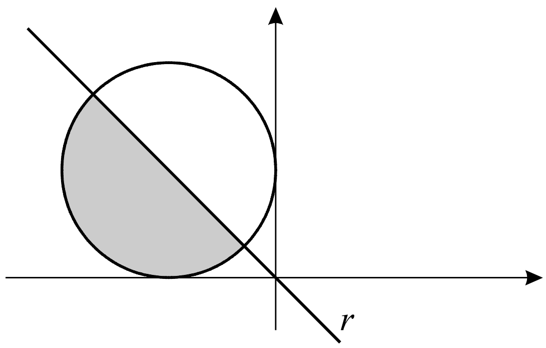
Indique o valor da probabilidade condicionada $P(Y|X)$.

**(A)** $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{5}{12}$ **(C)** $\frac{7}{12}$ **(D)** $\frac{11}{24}$

**7.** Considere, no plano complexo, o conjunto representado na figura.

A circunferência tem raio 2 e é tangente aos eixos.

A recta $r$ contém a origem do referencial e o centro da circunferência.




Qual das condições seguintes, definidas em $\mathbb{C}$, define a região sombreada, incluindo a fronteira?

**(A)** $|z+2-2i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \pi$

**(B)** $|z-1+i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \pi$

**(C)** $|z-1+i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

**(D)** $|z+2-2i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção**: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

**1.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 16 \; cis \, \frac{\pi}{4}$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

**1.1.** Mostre que $z_1$ é solução da equação $iz = -\overline{z}$
( $i$ designa a unidade imaginária e $\overline{z}$ designa o conjugado de $z$ ).

**1.2.** Determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de $z_1$.

**2.** Um saco contém sete bolas, numeradas de 1 a 7, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se sucessivamente, de forma aleatória, **duas** bolas do saco, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.
Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja igual a quatro?
Apresente o resultado na forma de fracção.

**3.** Seja $S$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabendo que $A$ e $B$ são independentes, prove que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \times P(\overline{A})$$

($P$ designa probabilidade e $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de $A$).

**4.** Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

($\ln$ designa logaritmo de base $e$)

**4.1.** Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

**4.1.1.** Estude a função $f$ quanto à existência de assimptotas verticais.

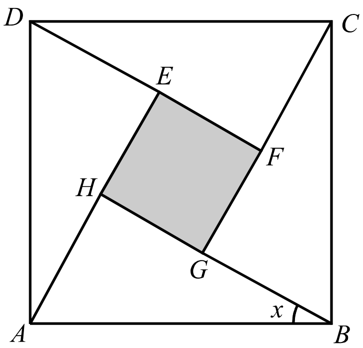
**4.1.2.** Investigue se a função $f$ tem máximo e, em caso afirmativo, determine-o.

**4.2.** A equação $f(x) = x - 12$ tem exactamente duas soluções. Recorrendo à sua calculadora, resolva **graficamente** esta equação. Apresente as soluções com aproximação às décimas.

Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

**5.** Na figura

- $[ABCD]$ é um quadrado de lado $1$.
- $[AHB]$, $[BGC]$, $[CFD]$ e $[DEA]$ são triângulos rectângulos iguais.
- $x$ designa a amplitude do ângulo $HBA$.




**5.1.** Mostre que a área da superfície sombreada é dada, em função de $x$, por

$$f(x) = 1 - 2\,\text{sen}\,x\cos x \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

**5.2.** Calcule $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido (deve incluir, na sua interpretação, a figura que se obtém para $x = \dfrac{\pi}{4}$).

**6.** Uma criança, sentada num baloiço, é largada de uma certa altura. Suponha que a criança não dá balanço, apenas aguarda que o baloiço pare.
De entre os gráficos seguintes, apenas um deles corresponde à função que dá a distância do baloiço ao chão, $t$ segundos após o início do movimento.

Gráfico 1

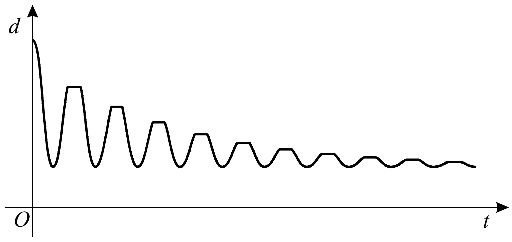



Gráfico 2

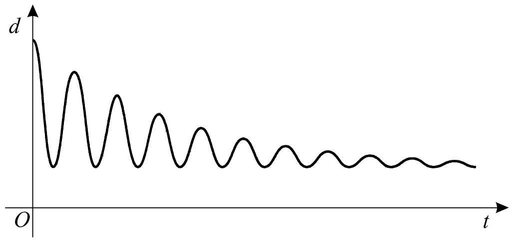



Gráfico 3

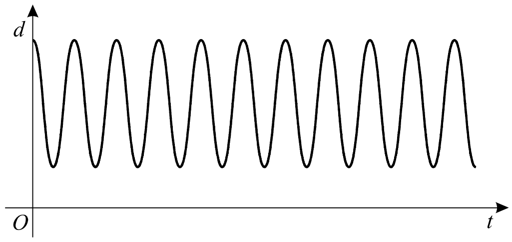
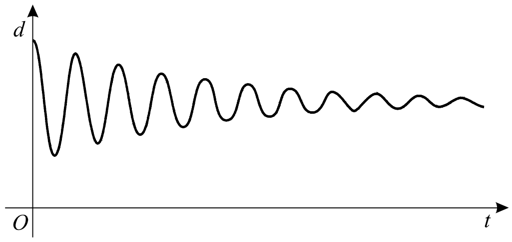



Gráfico 4




Qual é o gráfico correcto? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levam a rejeitar os outros três.

**Note bem**:
Não necessita de explicar por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar o que o leva a afirmar que os outros estão incorrectos, indicando três razões diferentes (uma por cada gráfico rejeitado). Mais precisamente: para cada um dos gráficos que considera incorrecto, deve explicitar uma (e só uma) razão pela qual o rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I** ........................................................................................ **63**

Cada resposta certa ........................................................................ +9
Cada resposta errada........................................................................ - 3
Cada questão não respondida ou anulada ....................................... 0

**Nota:**
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II** ........................................................................................**137**

**1.** ........................................................................................ 21

**1.1.** ..................................................................................10
**1.2.** ..................................................................................11

**2.** ........................................................................................ 15

**3.** ........................................................................................ 15

**4.** ........................................................................................ 45

**4.1.** ..................................................................................30
**4.1.1.** ...................................................15
**4.1.2.** ...................................................15
**4.2.** ..................................................................................15

**5.** ........................................................................................ 26

**5.1.** ..................................................................................13
**5.2.** ..................................................................................13

**6.** ........................................................................................ 15

**TOTAL** ........................................................................................ **200**

# Formulário

## Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ *– raio da base*; $g$ *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ *– raio*$)$

## Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r$ *– raio*$)$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

## Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$ , $k \in \{0, ..., n-1\}$

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$