EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **DATA ESPECIAL**
2003

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas subdivididas em alíneas, num total de nove.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

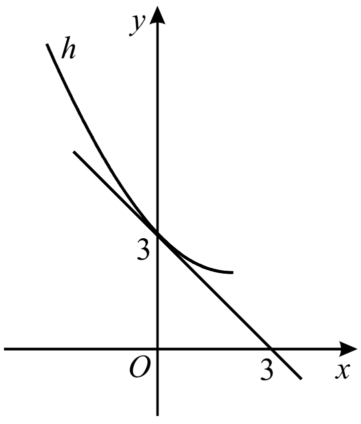
1. Uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tem um zero no intervalo $[-1,2]$.

Qual das expressões seguintes define uma função que tem, necessariamente, um zero no intervalo $[-5,\,-2]$?

(A) $f(x+4)$ **(B)** $|f(x)|+4$

(C) $f(x)-4$ **(D)** $f(x-4)$

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, bem como parte da recta tangente ao gráfico de h, no ponto $(0,3)$. Esta recta intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.



Qual das expressões seguintes pode definir h', função derivada de h ?

(A) $2-\frac{x}{3}$ **(B)** $1-\frac{x}{2}$ **(C)** $\frac{x}{3}-2$ **(D)** $\frac{x}{2}-1$

3. Indique qual das expressões seguintes é, para qualquer número real a superior a 1, igual a

$a^{2+\log_a 3}$

(A) $3\,a^2$

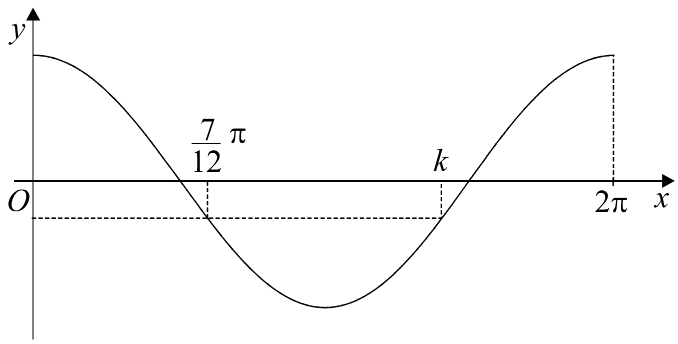
(B) $2\,a^3$

(C) $3+a^2$

(D) $2+a^3$

4. Na figura está a representação gráfica da função f, definida, no intervalo $[0, 2\,\pi]$, por $f(x) = \cos x$.

Tem-se que $f(k) = f\left(\frac{7\,\pi}{12}\right)$



Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{11\,\pi}{12}$

(B) $\frac{14\,\pi}{12}$

(C) $\frac{17\,\pi}{12}$

(D) $\frac{19\,\pi}{12}$

5. Numa conferência de alto nível, encontram-se doze políticos de quatro países, sendo três de cada país (o Presidente da República, o Primeiro-Ministro e o Ministro dos Negócios Estrangeiros).

De quantas maneiras diferentes se podem dispor as doze pessoas, em fila, para uma fotografia, de tal modo que os representantes de cada país fiquem juntos?

(A) $13\,198$ **(B)** $21\,106$ **(C)** $31\,104$ **(D)** $41\,162$

6. Seja Ω o espaço de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$ é igual a 1.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os acontecimentos A e B são incompatíveis.

(B) Os acontecimentos A e B são independentes.

(C) Se A se realiza, então B também se realiza.

(D) Se B se realiza, então A também se realiza.

7. Seja w um número complexo.

A imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes cúbicas de w pertence à região definida pela condição $0 < arg\,(z) < \frac{\pi}{6}$

A que quadrantes pertencem as imagens geométricas das outras raízes cúbicas de w ?

(A) Primeiro e terceiro.

(B) Segundo e terceiro.

(C) Segundo e quarto.

(D) Terceiro e quarto.

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i \qquad\qquad z_2 = cis\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

1.1. Resolva a equação $(1+2i)\,z = 6 + z_1 \times \overline{z_1}$

Apresente a solução na forma algébrica.

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

2. Numa turma do 12.º ano, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	Raparigas	Rapazes
16 anos	5	6
17 anos	7	8

Para formar uma comissão que vai preparar um baile de finalistas, vão ser sorteados três rapazes e duas raparigas desta turma.

2.1. Qual é a probabilidade de a comissão ficar constituída apenas por jovens de 16 anos? Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

2.2. Admita agora que já estão sorteados **quatro** dos cinco jovens que vão constituir a comissão: **os três rapazes e uma das raparigas, a qual tem 16 anos de idade**.
Para a comissão ficar completa, falta, portanto, escolher aleatoriamente uma rapariga.
Seja X a variável aleatória: *número de raparigas de 17 anos que a comissão vai incluir*.
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fracção.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3 - \sqrt{9-x}} & se \;\; x < 0 \\ 6 & se \;\; x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x) + 5x}{x} & se \;\; x > 0 \end{cases}$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à continuidade.

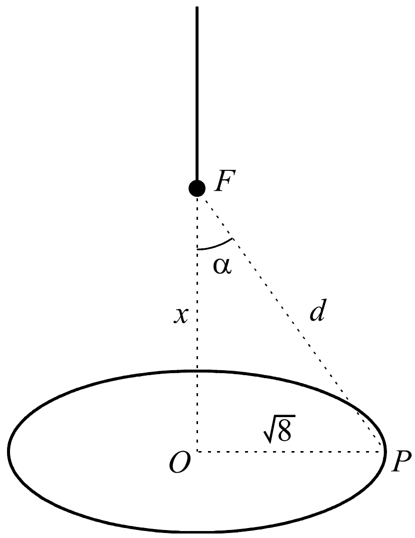
3.2. A equação $f(x) = x^2$ tem exactamente duas soluções. Utilizando a sua calculadora, determine-as **graficamente**. Apresente os valores arredondados às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

4. Numa sala de laboratório está a decorrer uma experiência de óptica.

Na figura ao lado está um esquema dessa experiência.

Nela estão representadas:

- uma fonte luminosa F, que se encontra suspensa do tecto da sala (essa fonte pode subir e descer, pelo que a sua distância x ao chão da sala pode variar);
- uma circunferência de raio $\sqrt{8}$, traçada no chão da referida sala (o seu centro O está sob a fonte luminosa, no prolongamento do fio que a suspende do tecto).



Admita que a intensidade I da luz recebida num ponto P dessa circunferência é dada, numa certa unidade de medida, por:

$$I = \frac{\cos\alpha}{d^2}$$

α é o ângulo de incidência, assinalado na figura, e d é a distância do ponto P à fonte luminosa.

4.1. Mostre que a intensidade da luz recebida no ponto P é dada, em função de x, por

$$I(x) = \frac{x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}$$

4.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine o valor de x para o qual é máxima a intensidade da luz recebida no ponto P.

5. Para estudar a evolução das marcas obtidas pelos vencedores da prova da Maratona (masculina), nos Jogos Olímpicos da Era Moderna, representaram-se, num referencial xOy, tantos pontos quantas as provas sobre as quais existem registos do tempo do vencedor (cada ponto corresponde a uma prova).

Para cada ponto,

- a abcissa corresponde ao ano em que a prova se realizou (tomando para origem o ano 1896, ano em que se realizaram os primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna);
- a ordenada é o tempo, medido em horas, feito pelo vencedor.

Por exemplo, o ponto correspondente à Maratona dos Jogos Olímpicos de 1984 tem abcissa 88 (número de anos decorridos desde 1896) e ordenada $2{,}156$ (tempo, em horas, obtido pelo vencedor, o atleta português Carlos Lopes).

Depois de representados os pontos, obteve-se a recta de regressão (recta ajustada a esse conjunto de pontos). Essa recta, que designaremos por r, é o gráfico de uma função afim f, que se pode utilizar como modelo da situação em estudo.

Considere agora as seguintes questões:

- O declive da recta r é negativo. Porquê?
- Em 1916, 1940 e 1944 não se realizaram Jogos Olímpicos, em virtude das duas Guerras Mundiais. Como poderemos utilizar a função f para estimar o tempo que os vencedores teriam feito se os jogos se tivessem realizado?
- Admitindo que os Jogos Olímpicos se vão realizar durante vários milénios, será que a função f é um bom modelo para prever, a muito longo prazo, a evolução do tempo do vencedor da Maratona? Porquê?

Analise as três questões colocadas e, numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, refira a sua opinião sobre cada uma delas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada..	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21

1.1. 10
1.2. 11

2. 32

2.1. 16
2.2. 16

3. 33

3.1. 17
3.2. 16

4. 34

4.1. 17
4.2. 17

5. 17

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$ $\quad (r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta) \,.\, (\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho' cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\, (\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\, k\, \pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \,.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \,.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \,.\, e^u$

$(a^u)' = u' \,.\, a^u \,.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$