

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2004

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

- (A) -4 (B) 4 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

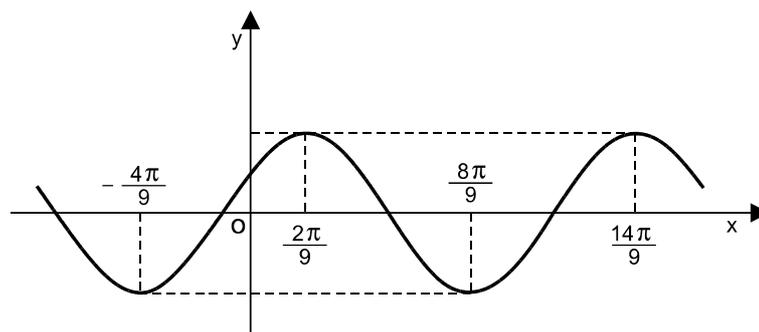
2. Sabe-se que:

- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso x (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

- (A) $\frac{10}{70x}$ (B) $\frac{10}{0,7x}$
- (C) $\frac{2}{70x}$ (D) $\frac{2}{0,7x}$

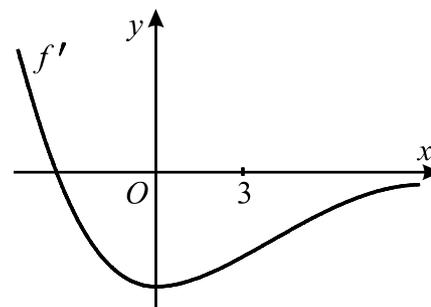
3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

- (A) $\frac{\pi}{9}$ (B) $\frac{2\pi}{9}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{4\pi}{3}$
4. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f' , função derivada de f .



Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7
5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

- (A) 121 (B) 133 (C) 144 (D) 156

- 6.** Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

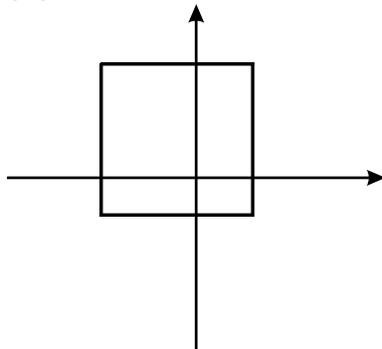
Sabe-se que:

$$P(A) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,1 \quad P(A \cup B) = 0,8$$

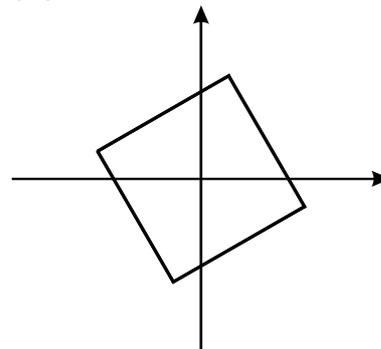
Qual é o valor de $P(\overline{B})$?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4
- 7.** Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w .
Qual poderá ser esse quadrilátero?

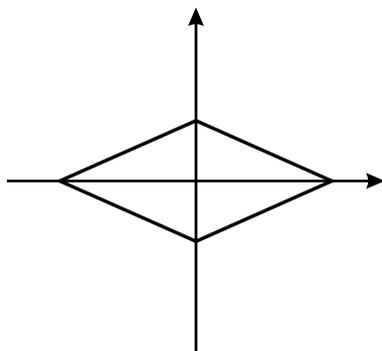
(A)



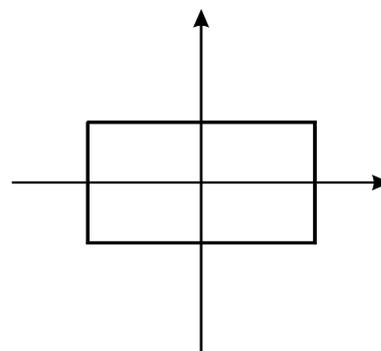
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$w = 4 - 3i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

- 1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $2i + \frac{w^2}{i}$

- 1.2. Seja α um argumento do número complexo w .

Exprima, na forma trigonométrica, em função de α , o produto de i pelo conjugado de w .

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- 2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2.1.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

- 2.2. O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a, b]$ (\ln designa logaritmo de base e).

Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b , arredondados às centésimas.

Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

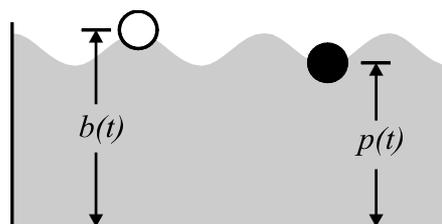
3. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por $b(t)$ e $p(t)$ as distâncias, em cm , dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1t} \text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0$$

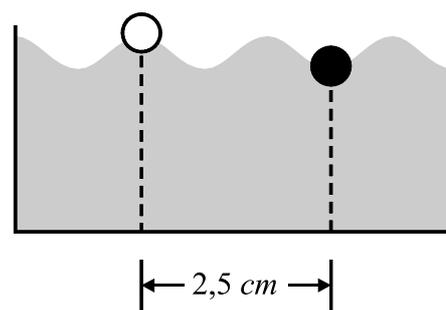
$$p(t) = 10 - 1,37 e^{-0,1t} \text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0$$



- 3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

- 3.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de $2,5 \text{ cm}$. Apresente o resultado em cm , arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, para cada $\alpha \in]0, 1[$, a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x^\alpha$. Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0, 1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

5. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

5.1. Considere os acontecimentos A e B :

A – «sai face par»;

B – «sai um número menor do que 4».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. **Justifique** a sua resposta.

5.2. Considere agora que o dado é lançado três vezes.

Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento?

Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. Considere o seguinte problema:

Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II 137

1.	21
1.1.	11
1.2.	10

2.	42
2.1.	28
2.1.1.	14
2.1.2.	14
2.2.	14

3.	28
3.1.	14
3.2.	14

4.	14
---------	----

5.	20
5.1.	10
5.2.	10

6.	12
---------	----

TOTAL 200