

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

Duração da prova: 120 minutos  
2004

2.ª FASE  
VERSÃO 1

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**VERSÃO 1**

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

## Formulário

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

### Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Indique o valor de  $p$  para o qual se verifica a igualdade  $\log_p 16 = 4$

- (A)  $-4$                       (B)  $4$                       (C)  $2$                       (D)  $\sqrt{2}$

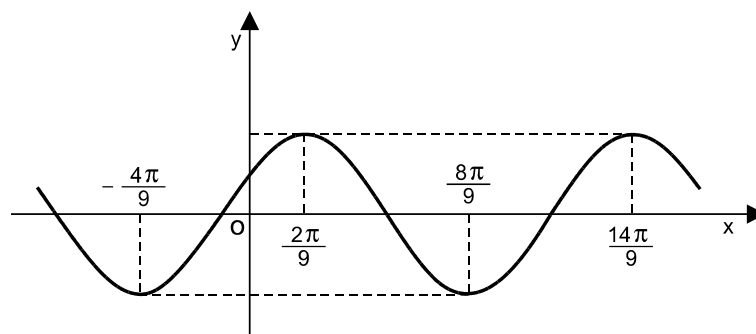
2. Sabe-se que:

- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso  $x$  (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

- (A)  $\frac{10}{70x}$                       (B)  $\frac{10}{0,7x}$
- (C)  $\frac{2}{70x}$                       (D)  $\frac{2}{0,7x}$

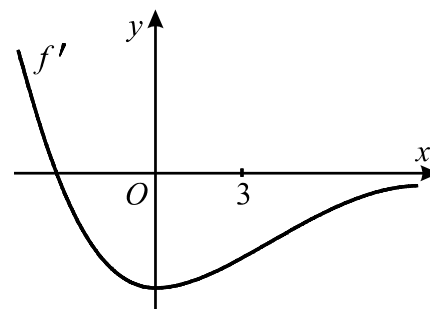
3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

- (A)  $\frac{\pi}{9}$                       (B)  $\frac{2\pi}{9}$                       (C)  $\frac{2\pi}{3}$                       (D)  $\frac{4\pi}{3}$
4. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de  $f'$ , função derivada de  $f$ .



Sabe-se ainda que  $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de  $f(3)$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 5                      (D) 7
5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

- (A) 121                      (B) 133                      (C) 144                      (D) 156

- 6.** Seja  $S$  o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.  
Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

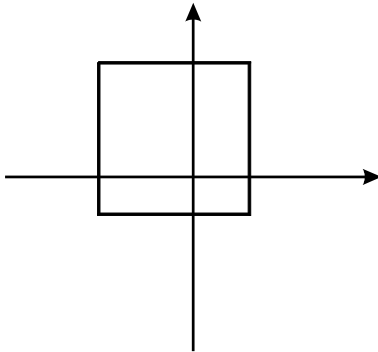
Sabe-se que:

$$P(A) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,1 \quad P(A \cup B) = 0,8$$

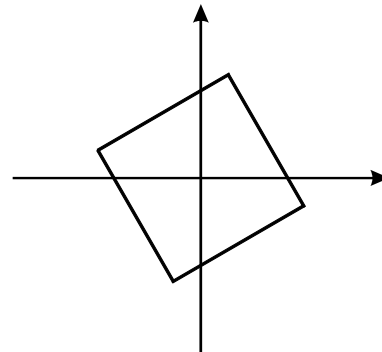
Qual é o valor de  $P(\overline{B})$  ?

- (A) 0,1                      (B) 0,2                      (C) 0,3                      (D) 0,4
- 7.** Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo  $w$ .  
Qual poderá ser esse quadrilátero?

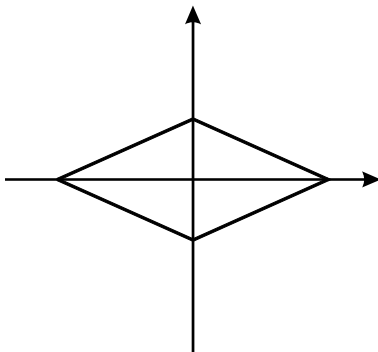
(A)



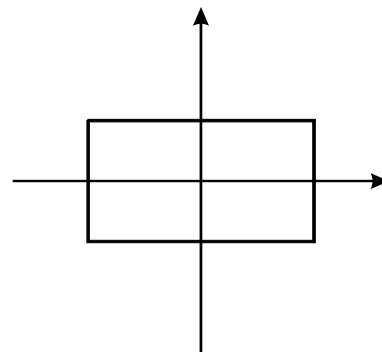
(B)



(C)



(D)



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$w = 4 - 3i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica,  $2i + \frac{w^2}{i}$

1.2. Seja  $\alpha$  um argumento do número complexo  $w$ .

Exprima, na forma trigonométrica, em função de  $\alpha$ , o produto de  $i$  pelo conjugado de  $w$ .

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

2.1.2. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.2. O conjunto solução da inequação  $f(x) \leq 3 + \ln x$  é um intervalo fechado  $[a, b]$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para  $a$  e  $b$ , arredondados às centésimas.

**Nota:** apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

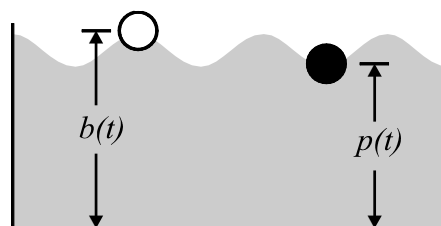
3. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por  $b(t)$  e  $p(t)$  as distâncias, em  $cm$ , dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente,  $t$  segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1t} \text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0$$

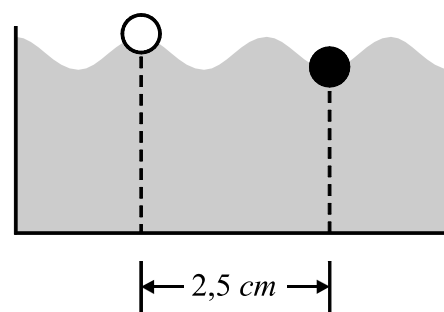
$$p(t) = 10 - 1,37 e^{-0,1t} \text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0$$



- 3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

- 3.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de  $2,5 \text{ cm}$ . Apresente o resultado em  $cm$ , arredondado às décimas.



**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, para cada  $\alpha \in ]0, 1[$ , a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = x^\alpha$ . Prove que, qualquer que seja o valor de  $\alpha \in ]0, 1[$ , o gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para baixo.

5. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

5.1. Considere os acontecimentos  $A$  e  $B$ :

$A$  – «sai face par»;

$B$  – «sai um número menor do que 4».

Indique o valor da probabilidade condicionada  $P(B|A)$ . **Justifique** a sua resposta.

5.2. Considere agora que o dado é lançado três vezes.

Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento?

Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. Considere o seguinte problema:

*Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?*

Uma resposta correcta para este problema é  $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

**Nota:**

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 63**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II ..... 137**

1. ....	21
1.1. ....	11
1.2. ....	10

2. ....	42
2.1. ....	28
2.1.1. ....	14
2.1.2. ....	14
2.2. ....	14

3. ....	28
3.1. ....	14
3.2. ....	14

4. ....	14
---------	----

5. ....	20
5.1. ....	10
5.2. ....	10

6. ....	12
---------	----

**TOTAL ..... 200**