

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2007 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a área do retângulo é igual a 5, designado por x o comprimento de um dos lados e por y o comprimento de um lado adjacente, temos que:

$$x \times y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{x}$$

Assim o perímetro do retângulo é:

$$x + \frac{5}{x} + x + \frac{5}{x} = 2x + 2 \times \frac{5}{x} = 2x + \frac{10}{x}$$

Resposta: **Opção A**

2. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2 \cos x)' = (3)' - (2 \cos x)' = 0 - 2(-\sin x) = 2 \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 2\pi]$ as três soluções são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f , no intervalo $[0, 2\pi]$, vem:

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	min	\nearrow	Máx	\searrow	min

Logo, o valor x de para o qual $f(x)$ é máximo, é π

Resposta: **Opção C**

3. Pela observação do gráfico podemos verificar que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) < 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) > 0$, pelo que podemos

garantir que $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)} < 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(x)} > 0$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(x)}$$

Ou seja, que não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Resposta: **Opção D**



4. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g , e pela observação do gráfico, temos que: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$. Como a função h é definida por $h(x) = x - 1$, temos que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

Logo:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

E assim, como os limites laterais são iguais, temos que: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

Resposta: **Opção C**

5. Podemos considerar que um dos cientistas escolheu um dos hotéis. Para que os dois cientistas escolham o mesmo hotel, o segundo cientista deverá escolher o mesmo hotel. Como existem 7 hotéis na cidade (número de casos possíveis) e apenas um foi escolhido pelo primeiro cientista (número de casos favoráveis) recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade do segundo cientista escolher, ao acaso, o mesmo hotel do primeiro cientista é $\frac{1}{7}$

Resposta: **Opção A**

6. Quando se lançam dois dados numerados de 1 a 6, existem apenas 3 hipóteses de obter uma soma igual a 4 ($3 + 1$, $1 + 3$ e $2 + 2$). Assim, para calcular a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados, sabendo que a soma dos números saídos foi quatro, consideramos 3 casos possíveis e apenas 1 favorável ($2 + 2$), pelo que, a probabilidade é $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^p = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de p por 4.

Assim, como $i^n = -i$, temos que $i^n = -i = i^3 = i^{4 \times p + 3}$, para $p \in \mathbb{N}$.

Logo $i^{n+1} = i^{(4 \times p + 3) + 1} = i^{4 \times p + 4} = i^{4 \times (p+1)} = i^{4 \times (p+1) + 0} = i^0 = 1$

Resposta: **Opção A**



GRUPO II

1.

- 1.1. Como $\arg(z_1) = \alpha$, temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \alpha$
Como $z_2 = 4iz_1$, temos que $-z_2 = -4iz_1$

Como $-4i = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$, fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$$-z_2 = -4iz_1 = \left(4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}\right) \times (\rho \operatorname{cis} \alpha) = (4\rho) \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

Assim, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

- 1.2. Como $z_2 = 4iz_1$, vem que:

$$z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = 12i + 4y(-1) = -4y + 12i$$

Assim sabemos que $\operatorname{Im}(z_2) = 12$, e também que $\operatorname{Im}(z_1) = y$.

Como $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ temos que $y = 12$, pelo que, substituindo na expressão simplificada de z_2 temos:

$$z_2 = -4(12) + 12i = -48 + 12i$$

2. Retirando 2 cartas do conjunto das 8 (formado pelos ases e reis), existem, na totalidade, 8C_2 conjuntos diferentes (e equiprováveis).

Destes conjuntos, apenas 4×4 são constituídos por cartas com diferente valor (que corresponde ao agrupamento de qualquer um dos 4 ases com qualquer um dos 4 reis).

Da mesma forma, existem 8C_2 conjuntos diferentes de 2 cartas selecionadas do grupo de damas e valetes, dos quais apenas 4×4 são constituídos por cartas de diferente valor.

Assim, a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe, é:

$$\frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{{}^8C_2 \times {}^8C_2} = \frac{16^2}{({}^8C_2)^2} = \frac{16}{49}$$

3.

- 3.1. Como X e Y são acontecimentos independentes, temos que $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$
E a probabilidade de que X não ocorra nem ocorra Y pode ser escrita como $P(\overline{X \cap Y})$

Assim,

$$\begin{aligned} P(\overline{X \cap Y}) &= P(\overline{X \cup Y}) \\ &= 1 - P(X \cup Y) \\ &= 1 - (P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)) \\ &= 1 - P(X) - P(Y) + P(X \cap Y) \\ &= 1 - P(X) - P(Y) + P(X) \times P(Y) \\ &= 1 - a - b + a \times b \end{aligned}$$

Leis de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$

Teorema: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Teorema: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Hipótese: $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$

Hipótese: $P(X) = a$ e $P(Y) = b$

Logo, $P(\overline{X \cap Y}) = 1 - a - b + a \times b$ *q.e.d.*



3.2. Definindo os acontecimentos

- X : «tirar um iogurte de pêssago»
- Y : «tirar um sumo de laranja»

Temos que $a = P(X) = \frac{1}{5}$, $b = P(Y) = \frac{1}{3}$ e admite-se que X e Y são independentes.

Como a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a $1 - a - b + a \times b$, temos que a probabilidade (na forma de fração irredutível) de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssago e o sumo não ser de laranja é:

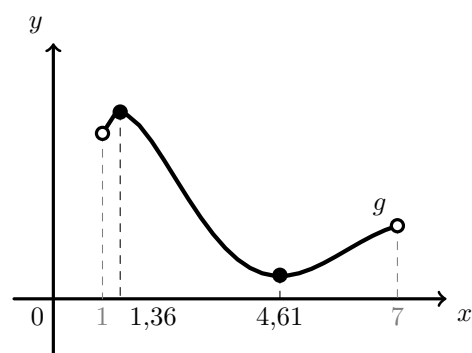
$$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

4. Representando esta função no intervalo $]1,7[$, na calculadora gráfica, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

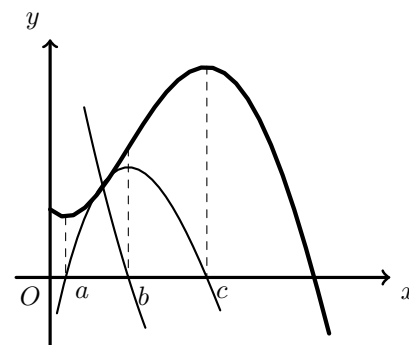
Depois, como os valores de x que verificam a condição $g'(x) < 0$, $(]a,b[)$ são aqueles em que a função é decrescente. Por observação do gráfico, podemos concluir que são os valores compreendidos entre o maximizante de g , no intervalo definido (ou seja a), e o minimizante da função no mesmo intervalo, (b).

Assim, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados de maximizantes e minimizantes da função, obtemos que os valores, aproximados às centésimas, de a e de b :

$$a \approx 1,36 \text{ e } b \approx 4,61$$



5. O zero da função representada no gráfico da Figura 2, corresponde à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de h , o que é suficiente para relacionar este gráfico com a segunda derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]0,b[$ a função representada no gráfico da Figura 1 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a concavidade do gráfico de h está voltada para cima; e de forma análoga, quando $x \in]b, +\infty[$, a função do gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto o gráfico da função h , tem a concavidade voltada para baixo. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 2 é o gráfico de h''**



Os zeros da função representada no gráfico Figura 3, correspondem às abcissas dos extremos de h , o que permite relacionar este gráfico com a primeira derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]a,c[$ a função representada no gráfico da Figura 3 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a função h é crescente; e de forma análoga, quando $x \in]0,a[\cup]c, +\infty[$, a função representada no gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto a função h é decrescente. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 3 é o gráfico de h'**



6.

6.1. As abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln(x^2) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$$(-\sqrt{e}, 0) \text{ e } (\sqrt{e}, 0)$$

6.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (1 - \ln(x^2))' = (1)' - (\ln(x^2))' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{x}} = 0$$

Eq. Impossível

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		n.d.	-
$f(x)$		n.d.	

\nearrow \searrow

Assim podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$;
- é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

7. Partindo da área do círculo menor temos:

$$\begin{aligned} a = \pi r^2 &\Leftrightarrow A\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } a = A\sqrt{\cos\theta}\text{)} \\ &\Leftrightarrow \pi R^2\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } A = \pi R^2\text{)} \\ &\Leftrightarrow R^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \Leftrightarrow && \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[4]{2}r)^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } R = \sqrt[4]{2}r\text{)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}r^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \Leftrightarrow && \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{\cos\theta} = 1 \Leftrightarrow && \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow && \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)} \\ &\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow && \\ &\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow && \\ &\Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$, porque $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

