

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

COTAÇÕES

GRUPO I (8 × 5 pontos) **40 pontos**

GRUPO II **160 pontos**

1. 30 pontos

1.1. 15 pontos

1.2. 15 pontos

2. 30 pontos

2.1. 15 pontos

2.2. 15 pontos

3. 15 pontos

4. 15 pontos

5. 15 pontos

6. 30 pontos

6.1. 15 pontos

6.2. 15 pontos

7. 25 pontos

7.1. 10 pontos

7.2. 15 pontos

TOTAL..... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DA PROVA

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta extensa orientada apresentam-se organizados por níveis de desempenho. Nestes itens, desde que tenham cotação igual ou superior a quinze pontos e impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte, apresentam-se critérios de classificação a aplicar às respostas aos itens em situações não consideradas anteriormente.

Situação	Classificação
<p>1. Engano na identificação do item a que o examinando está a responder.</p> <p>2. Omissão da identificação do item a que o examinando está a responder.</p>	<p>Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.</p>
<p>3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o examinando não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.</p>	<p>Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.</p>
<p>4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.</p>	<p>A resposta deve ser classificada com zero pontos.</p>
<p>5. Ilegibilidade da resposta.</p>	<p>A resposta deve ser classificada com zero pontos.</p>
<p>6. Item com etapas.</p>	<p>A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual, eventualmente, se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.</p>
<p>7. Etapa com passos.</p>	<p>A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.</p> <p>A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.</p>
<p>8. Item ou etapa com classificação por níveis de desempenho.</p>	<p>O classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das indicadas.</p>
<p>9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].</p>	<p>São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.</p>
<p>10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.</p>	<p>Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no programa.</p> <p>O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.</p>

Situação	Classificação
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	<p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa.</p> <p>Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
13. Erro ocasional num cálculo.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	<p>A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação.</p> <p>Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.</p>
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O examinando não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o examinando escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o examinando apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
18. Na apresentação do resultado final, não está expressa a unidade de medida [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa ao resultado final é classificada como se a unidade de medida estivesse indicada.

Situação	Classificação
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta, excepto: <ul style="list-style-type: none"> - se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; - no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	C	D	B	C	B	B
Versão 2	C	B	B	A	C	B	C	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos ou no programa (ver critério 10 dos critérios gerais).

1.1. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

- Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica 1 ponto
- Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ 2 pontos
- Calcular $(-z_1)^3$ na forma algébrica 10 pontos
 - $(-1 + \sqrt{3} i)^3 = (-1 + \sqrt{3} i)^2 \times (-1 + \sqrt{3} i)$ 2 pontos
 - Quadrado do binómio 4 pontos
 - Multiplicação 4 pontos

ou

- Desenvolver a potência utilizando o Binómio de Newton 5 pontos
- Restantes cálculos 5 pontos
- Concluir que $8 = 8 \text{ cis } 0$ 2 pontos

2.º processo

- Calcular $(-z_1)$ na forma trigonométrica 7 pontos
 - Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica 1 ponto
 - Módulo de $(-z_1)$ 2 pontos
 - Argumento de $(-z_1)$ 3 pontos
 - Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica 1 ponto

ou

- Módulo de z_1 2 pontos
- Argumento de z_1 3 pontos
- Escrever z_1 na forma trigonométrica 1 ponto
- Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica 1 ponto
- Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ 2 pontos
- Calcular $(-z_1)^3$ ($8 \text{ cis } (2\pi)$ ou equivalente) 4 pontos
- Concluir que $8 \text{ cis } (2\pi) = z_2$ 2 pontos

3.º processo

- Escrever a expressão geradora das raízes cúbicas de z_2 2 pontos
- Concluir que uma das raízes cúbicas de z_2 é $2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 5 pontos
- Escrever $2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica ou $(-z_1)$ na forma trigonométrica
(**ver nota**) 7 pontos

Nota: A escrita de $(-z_1)$ na forma trigonométrica deve ser classificada de acordo com o já discriminado no 2.º processo; a escrita de $2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

- $2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$ 1 ponto
- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 2 pontos
- $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 pontos
- Restantes cálculos 2 pontos
- Concluir que $2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-z_1)$ 1 ponto

1.2. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

- Calcular i^{46} ($i^{46} = -1$) 3 pontos
- Calcular z_3 ($z_3 = -1 + \sqrt{3}i$) 1 ponto
- Indicar as coordenadas de $A(1, -\sqrt{3})$ e de $B(-1, \sqrt{3})$ (3 + 3) 6 pontos
- Calcular \overline{AB} ($\overline{AB} = 4$) 5 pontos

2.º processo

- Calcular i^{46} ($i^{46} = -1$) 3 pontos
- Calcular z_3 ($z_3 = -1 + \sqrt{3}i$) 1 ponto
- Reconhecer que z_1 e z_3 são números complexos simétricos 3 pontos
- Referir que $\overline{OA} = |z_1|$ (ou $\overline{OB} = |z_3|$) 2 pontos
- Calcular \overline{OA} (ou \overline{OB}) 2 pontos
- Calcular \overline{AB} ($\overline{AB} = \overline{OA} + \overline{OB}$ ou $\overline{AB} = 2\overline{OA}$) 4 pontos

3.º processo

- Calcular i^{46} ($i^{46} = -1$) 3 pontos
- Calcular z_3 ($z_3 = -1 + \sqrt{3} i$) 1 ponto
- Identificar $\overline{AB} = |z_1 - z_3|$ (ou $\overline{AB} = |z_3 - z_1|$) 5 pontos
- Calcular $z_1 - z_3$ (ou $z_3 - z_1$) 4 pontos
- Calcular \overline{AB} ($\overline{AB} = 4$) 2 pontos

2.1. **15 pontos**

- Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1, 2 e 3**) 12 pontos
- Resultado na forma pedida $P = 0,24$ (**ver nota 4**) 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se, a seguir, possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a classificação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso

Fracções com denominador ${}^{10}A'_3$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

- ${}^9A'_2 \times 3$ (ou equivalente) 12 pontos
- ${}^{10}A'_2 \times 3$ (ou equivalente) ou ${}^9A'_2$ (ou equivalente) 8 pontos
- ${}^9A_2 \times 3$ (ou equivalente) 6 pontos

2. Caso a resposta do examinando corresponda a um nível de desempenho que se enquadre entre duas situações previstas, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do examinando revelar um desempenho inferior à última situação prevista para o 1.º caso, mas seja uma fracção de valor pertencente ao intervalo $[0, 1]$ e com denominador ${}^{10}A'_3$ (ou equivalente), a classificação a atribuir deverá ser de 4 pontos.

2.º caso

Fracções (de valor pertencente ao intervalo $[0, 1]$) com outros denominadores e com numerador igual a:

- ${}^9A'_2 \times 3$ (ou equivalente) 6 pontos
- Outras situações 0 pontos

3. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em um ponto.
4. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

A composição deverá contemplar os seguintes pontos:

- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$: o examinando deverá referir que ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{11}C_2$: o examinando deverá referir que, como a Ana faz parte da comissão, só é preciso escolher duas raparigas de entre as onze restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é ${}^{11}C_2$;
- Explicação de 9 (ou 9C_1): o examinando deverá referir que, como o Miguel faz parte da comissão, só é preciso escolher um rapaz de entre os nove restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é 9;
- Explicação de ${}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que ${}^{11}C_2 \times 9$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes, incluindo a Ana e o Miguel, que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que a diferença representa o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma, não incluindo, simultaneamente, a Ana e o Miguel.

Na tabela seguinte indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis		
			1	2	3
Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina					
Níveis	5	O examinando explica correctamente os cinco pontos.	13	14	15
	4	O examinando explica correctamente quatro pontos.	10	11	12
	3	O examinando explica correctamente três pontos.	7	8	9
	2	O examinando explica correctamente dois pontos.	4	5	6
	1	O examinando explica correctamente um ponto.	1	2	3

Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

3. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos (**ver nota**):

1.º processo

Reconhecer que, se a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, ficam na caixa B tantas bolas verdes como azuis 10 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde..... 5 pontos

2.º processo

O examinando considera que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é azul.

Identificar o número de casos possíveis (8) 3 pontos

Identificar o número de casos favoráveis (5) 3 pontos

Probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul $\left(P = \frac{5}{8}\right)$ 3 pontos

Concluir que o valor da probabilidade encontrado é diferente do valor da probabilidade dado 3 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde..... 3 pontos

Nota: Se o examinando começar por considerar que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é verde e concluir que a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, prova a implicação recíproca da implicação pedida. Neste caso a classificação a atribuir deverá ser de cinco pontos.

4. 15 pontos

Estudar a função quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico 8 pontos

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (**ver nota 1**) 3 pontos

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f 2 pontos

Justificar que o gráfico de f não tem outras assíntotas verticais 3 pontos

Estudar a função quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico (**ver nota 2**) 7 pontos

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 5 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$ 2 pontos

Notas:

1. Apenas o valor do $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ permite concluir a existência da assíntota vertical. Assim, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada, quer o examinando calcule os dois limites laterais, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, quer apenas calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

2. Se o examinando tentar calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5.	15 pontos
Representar graficamente a função f em $[0, 3]$	2 pontos
Representar graficamente a função g em $[0, 3]$	2 pontos
Assinalar devidamente o ponto O	1 ponto
Assinalar devidamente o ponto A	1 ponto
Coordenadas aproximadas do ponto $A(1,4; 1,2)$ (ver nota)..... (1 + 1).....	2 pontos
Assinalar devidamente o ponto B	1 ponto
Coordenadas do ponto $B(2, 0)$	(1 + 1)..... 2 pontos
Desenhar o triângulo $[OAB]$	1 ponto
Expressão que dá a área do triângulo $[OAB]$	2 pontos
Área do triângulo $[OAB]$	1 ponto

Nota: São de aceitar, sem qualquer desvalorização, para valores das coordenadas do ponto A, valores que difiram dos valores dados numa décima. Se forem apresentados outros valores, que não respeitem o referido anteriormente, a classificação a atribuir à respectiva etapa deve ser de zero pontos.

6.1.	15 pontos
Determinar $h'(x)$	2 pontos
Determinar os zeros de h'	4 pontos
Escrever a equação $h'(x) = 0$	1 ponto
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	3 pontos
Estudar o sinal de h' e conseqüente conclusão, relativamente à monotonia e aos extremos relativos de h , com recurso a um quadro	5 pontos
Primeira linha do quadro (relativa à variável x , de acordo com o domínio da função)	2 pontos
Sinal de h'	2 pontos
Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h	1 ponto
Determinar o máximo ($h(0) = 4$)	2 pontos
Indicar os intervalos de monotonia (ver nota)	2 pontos

Nota: A resposta correcta é o intervalo $] -1, 0]$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona crescente, e o intervalo $[0, +\infty[$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona decrescente. No entanto, é de aceitar, sem qualquer desvalorização, o intervalo de $] -1, 0[$ para o intervalo onde a função é monótona crescente e $]0, +\infty[$ para o intervalo onde a função é monótona decrescente.

6.2. 15 pontos

- Referir que a função h é contínua em $[5, 6]$ (**ver nota 1**) 2 pontos
- Calcular $h(5)$ 3 pontos
- Calcular $h(6)$ 3 pontos
- Concluir que $h(6) < 0 < h(5)$ (ou concluir que $h(5)$ e $h(6)$ têm sinais contrários) 3 pontos
- Concluir o pretendido (**ver nota 2**) 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[5, 6]$, mas afirmar que a função é contínua em todo o seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, ou do seu Corolário, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

7.1. 10 pontos

- Calcular $N(0)$ e interpretar 5 pontos
- $N(0) = 10$ 2 pontos
- Interpretação: 10 corresponde ao número de amigos
que formaram a associação..... 3 pontos

- Calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ e interpretar..... 5 pontos
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 2000$ 2 pontos
- Interpretação: com o decorrer do tempo, o número de sócios
aproxima-se de 2000 3 pontos

7.2. 15 pontos

- Equacionar o problema $N(t) = 1000$ 2 pontos
- Resolver a equação $\frac{2000}{1 + 199e^{-0.01t}} = 1000$ 11 pontos
- Obter a equação $e^{-0.01t} = \frac{1}{199}$ (ou equivalente)..... 5 pontos
- Obter a equação $-0,01t = \ln\left(\frac{1}{199}\right)$ 3 pontos
- Restantes cálculos 3 pontos
- Resposta: 529 ou 530 dias 2 pontos