

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2008 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a probabilidade do João acertar em cada tentativa é 0,8, a probabilidade do João acertar nas 4 tentativas é

$$0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = (0,8)^4 = 0,4096$$

Resposta: **Opção D**

2. Como na experiência aleatória descrita, foi definido que «*Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A*», para calcular a probabilidade de a bola retirada ser verde, consideramos apenas o conteúdo da caixa A (duas bolas verdes e uma bola amarela).

Assim temos que existem 2 bolas verdes (número de casos favoráveis) num total de 3 bolas (número de casos possíveis), pelo que a probabilidade é de $\frac{2}{3}$

Resposta: **Opção D**

3. A linha do triângulo de Pascal que tem 15 elementos é constituída por 16 números da forma ${}^{14}C_k$. Como ${}^{14}C_0 = {}^{14}C_{14} = 1$, ${}^{14}C_1 = {}^{14}C_{13} = 14$ e ${}^{14}C_2 = {}^{14}C_{12} = 91$ estes são os únicos 6 elementos da linha menores que 100, porque ${}^{14}C_3 = {}^{14}C_{11} = 364$ e todos os restantes são maiores que 364.

Resposta: **Opção C**

4. Como o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a :

$$3 = 2^{a \times 1} - 1 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^a \Leftrightarrow 4 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

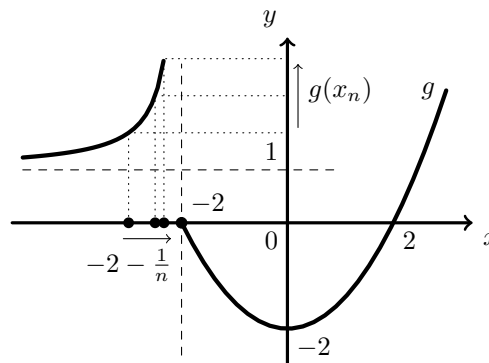


5. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = +\infty$, temos que

$$\lim(x_n) = +\infty \text{ ou então } \lim(x_n) = -2^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim \left(-2 + \frac{2}{n} \right) = -2 + 0^+ = -2^+$
- $\lim \left(-2 - \frac{1}{n} \right) = -2 - 0^+ = -2^-$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0^+ = 1^+$
- $\lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1 - 0^+ = 1^-$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = +\infty$ é $-2 - \frac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = -2 + \frac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção B**

6. Como $y = -1$ é a única assíntota do gráfico da função f , e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: **Opção B**

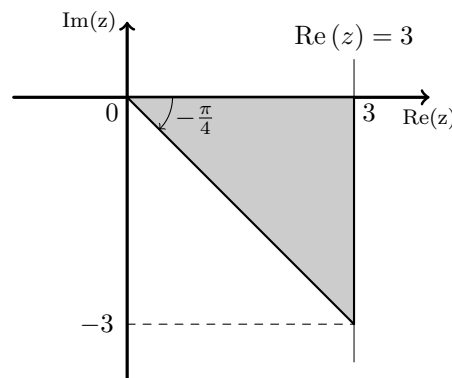
7. Os números complexos z e $-z$, têm argumentos que diferem de π radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

8. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente duas condições:

- $\operatorname{Re}(z) \leq 3$, ou seja, pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\operatorname{Re}(z) = 3$
- $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$, ou seja, os pontos que são imagens geométricas de números complexos cujo argumento está compreendido entre $-\frac{\pi}{4}$ e 0



Resposta: **Opção A**



GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{18} = i^{4 \times 2 + 2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i} &= \frac{2(1 - i) - (-1) - 3}{1 - 2i} = \frac{2 - 2i + 1 - 3}{1 - 2i} = \frac{-2i}{1 - 2i} = \frac{-2i(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-2i - 4i^2}{1^2 - (2i)^2} = \\ &= \frac{-2i + 4}{1 + 4} = \frac{4 - 2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

1.2. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

Como existem 4 raízes quartas de z , cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado centrado na origem, temos que as outras 3 raízes quartas de z são:

- $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$
- $z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

Pelo que a raiz quarta de z cuja imagem geométrica é um ponto do 3º quadrante é $z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

2.

2.1. Temos que,

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) && \left. \begin{array}{l} \text{Teorema: } P(X) = 1 - P(\overline{X}) \\ \text{Teorema: } P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y) \\ \text{Teorema: } P(X) = 1 - P(\overline{X}) \\ \text{Leis de De Morgan: } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \end{array} \right\} \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= P(\overline{A} \cup \overline{B}) \end{aligned}$$

Logo, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$ *q.e.d.*



2.2. Como se pretende calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, para utilizar a igualdade $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$, podemos definir os acontecimentos

- A : O estudante escolhido ser rapaz
- B : O estudante escolhido ter tido classificação positiva

E assim, $\overline{A \cup B}$ é o acontecimento "o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva".

Temos que o número de casos possíveis é $160 + 120 = 280$, correspondendo ao número total de estudantes que realizaram o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

- O número de casos favoráveis para o acontecimento \overline{A} é 160, correspondendo ao número de raparigas. E assim temos que $P(\overline{A}) = \frac{160}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento B é $160 \times 0,65 + 120 \times 0,6 = 176$, correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes. E assim temos que $P(B) = \frac{176}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento $A \cup B$ é $120 + 160 \times 0,65 = 224$, correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. E assim temos que $P(A \cup B) = \frac{224}{280}$

Logo, calculando a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, e apresentando o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas, vem

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) = \frac{160}{280} - \frac{176}{280} + \frac{224}{280} = \frac{208}{280} \approx 0,74$$

3. Como as fichas têm os números 1 e 2, só existem três somas possíveis:

- soma 2: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 1 (3C_2 conjuntos possíveis).
- soma 3: se as duas fichas selecionadas tiverem números diferentes (${}^3C_1 \times {}^4C_1$ conjuntos possíveis).
- soma 4: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 2 (4C_2 conjuntos possíveis).

Logo, como existem 7C_2 conjuntos diferentes de fichas, podemos calcular os valores da probabilidade associada à ocorrência de cada soma:

- $P(X = 2) = \frac{{}^3C_2}{{}^7C_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
- $P(X = 3) = \frac{{}^3C_1 \times {}^4C_1}{{}^7C_2} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- $P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^7C_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$



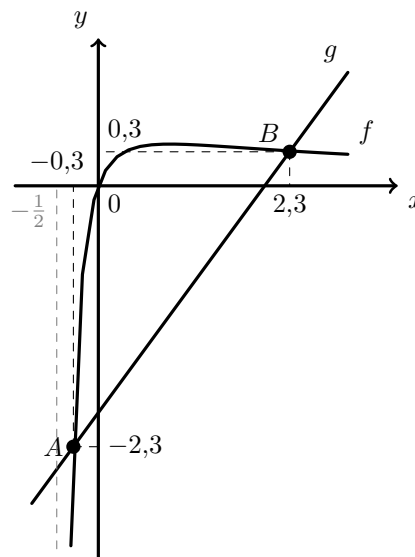
4. Traçando na calculadora gráfica os gráficos das funções f e g numa janela compatível com o intervalo $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Assim, as abscissas dos pontos A e B , também assinalados na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos.

As coordenadas, aproximadas às décimas, são $A(-0,3; -2,3)$ e $B(2,3; 0,3)$.

Pela observação do gráfico podemos observar que os pontos do gráfico de f têm ordenada maior que os pontos do gráfico de g , quando as respectivas abcissas estão compreendidos entre as abcissas dos pontos A e B , pelo que a solução da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, é o conjunto $] -0,3; 2,3[$; logo os números inteiros que pertencem a este intervalo, ou seja as soluções inteiras de inequação são:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 2$$

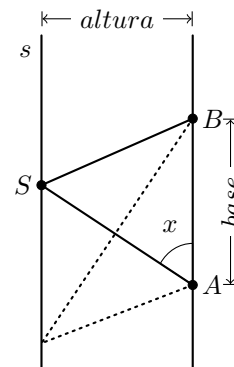


5. Considerando $[AB]$ como a base do triângulo, como os pontos A e B são fixos, temos que a base do triângulo é constante.

A altura do triângulo, relativa à base $[AB]$, é a distância entre as retas, que como são paralelas também é constante.

Assim, temos que $a(x)$, ou seja a área do triângulo $[ABS]$ é constante, pelo que o **Gráfico 3** não pode representar a função a

Como o ponto S se desloca sobre a reta s , existem localizações do ponto S , para as quais o ângulo BAS , ou seja, o ângulo x é superior a um ângulo reto, ou seja, a $\frac{\pi}{2}$ radianos, pelo que o gráfico **Gráfico 1** também não representa a função a , visto que neste gráfico a função está definida apenas para valores de x menores que $\frac{\pi}{2}$ radianos.



Como as retas s e AB são estritamente paralelas, não existem localizações do ponto S sobre a reta s , tais que o ângulo x tenha amplitude de π radianos (ou zero radianos), pelo que o gráfico **Gráfico 4** também não representa a função a , visto que neste gráfico a função está definida para valores de x iguais a zero e a π radianos.



6.

6.1. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas ($t = 0$), vem que:

$$M(0) = 15 \times e^{-0,02 \times 0} = 15 \times e^0 = 15 \times 1 = 15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$\begin{aligned} M(t) = \frac{15}{2} &\Leftrightarrow 15 \times e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{15}{2 \times 15} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,02t = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0,02} \Rightarrow t \approx 34,657 \end{aligned}$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0,657 \times 60 = 39,420 \approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

6.2.

Como a função M resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R}^+ , é contínua em \mathbb{R}^+ , e também, em $[2,5; 4]$, porque $[2,5; 4] \subset \mathbb{R}^+$

Como $13,847 < 14 < 14,268$, ou seja, como $M(4) < 14 < M(2,5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]2,5; 4[$ tal que $M(t_0) = 14$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

C.A.

Observando que 2 horas e 30 minutos corresponde a 2,5 horas, temos que:

$$M(2,5) = 15 \times e^{-0,02 \times 2,5} \approx 14,268$$

$$M(4) = 15 \times e^{-0,02 \times 4} \approx 13,847$$

7.

7.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abscissa 0, vem:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \text{sen}(4x) - (2 + \text{sen}(4 \times 0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \text{sen}(4x) - 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times \text{sen}(4x)}{4 \times x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} \stackrel{(1)}{=} 4 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

(1) fazendo $y = 4x$, se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$



7.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = (2 + \operatorname{sen}(4x))' = (2)' + (\operatorname{sen}(4x))' = 0 + (4x)' \cos(4x) = 4 \cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k ($k = 0$ e $k = 1$) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, ou seja $x = \frac{\pi}{8}$ e $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de g' para relacionar com a monotonia de g , no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, vem:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	

Assim, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que:

- o valor do máximo de g é $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de g é $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- g é crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{8}[$ e também no intervalo $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$
- g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

