Exame nacional de Matemática A (2009, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como existem 4 cartas de cada tipo, existem $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$ sequências do tipo ≪$2 - 4 - 6 - 7$ – Dama – Rei≫ (existem 4 hipóteses para cada posição na sequência).
   O número de casos possíveis corresponde é determinado pelo número de sequências (ou seja, a ordem é relevante) que se podem fazer com 6 cartas selecionadas de entre as 40 existentes: ${}^{40}A_6$.
   Logo, a probabilidade do jogador receber uma sequência do tipo ≪$2 - 4 - 6 - 7$ – Dama – Rei≫ é $\dfrac{4^6}{{}^{40}A_6}$

   Resposta: **Opção A**

2. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

   $$P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Logo, a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza, é

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2}$$

   Resposta: **Opção D**

3. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

   $$\frac{k}{8} + \frac{1}{4} + \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2k}{8} = \frac{8}{8} \Leftrightarrow k + 2 + 2k = 8 \Leftrightarrow 3k = 8 - 2 \Leftrightarrow k = \frac{6}{3} \Leftrightarrow k = 2$$

   Resposta: **Opção B**

4. Usando as propriedades das potências e dos logaritmos, temos que:

   $$e^{4\ln x} - 10^{2\log x} = e^{\ln x^4} - 10^{\log x^2} = x^4 - x^2$$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, em particular é contínua em $x = 0$, logo verifica-se a condição: $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

- $f(0) = \log_2(k + 0) = \log_2 k$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\log_2(k + x)\right) = \log_2(k + 0^+) = \log_2 k$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(2 \times 0)}{0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{2 \times \operatorname{sen}(2x)}{2 \times x} = 2 \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{(1)}{=} 2 \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

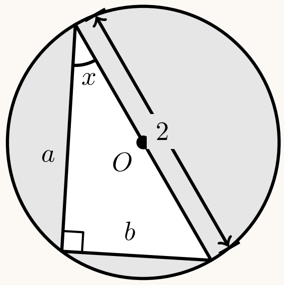
(1) fazendo $y = 2x$, se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$

Logo, como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, temos que:

$$\log_2 k = 2 \Leftrightarrow k = 2^2 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: **Opção D**

6. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2 \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \cos x$$

Logo, a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

$$A = A_\circ - A_\Delta = \pi r^2 - \frac{b \times a}{2} = \pi (1)^2 - \frac{2 \operatorname{sen} x \times 2 \cos x}{2} =$$

$$= \pi - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \pi - \operatorname{sen}(2x)$$

Resposta: **Opção A**

7. Se $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ então $\arg(\overline{z}) = -\frac{\pi}{3}$

Escrevendo $2i$ na f.t. temos $2i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

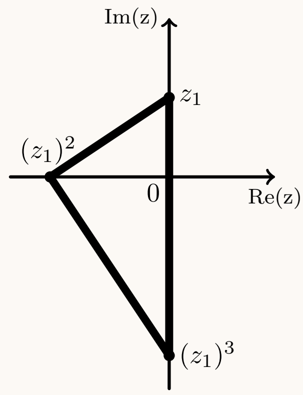
Assim, sendo $\rho = |z|$ (e por isso também $\rho = |\overline{z}|$) e fazendo a divisão na f.t. temos que:

$$\frac{2i}{\overline{z}} = \frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}}{\rho \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \frac{2}{\rho} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$$

Logo $\arg\left(\frac{2i}{\overline{z}}\right) = \frac{5}{6}\pi$

Resposta: **Opção C**

8.
- Como $z_1 = bi$, Ou seja z_1 é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.
- Logo $(z_1)^2 = (bi)^2 = b^2i^2 = b^2 \times (-1) = -b^2$ é um número real negativo com a respetiva representação geométrica sobre a parte negativa do eixo real.
- Logo $(z_1)^3 = (bi)^3 = b^3i^3 = b^3 \times (-i) = -b^3i$ é um número imaginário puro, com a respetiva representação geométrica sobre o eixo imaginário.



A única opção em que triângulo tem dois vértices sobre o eixo imaginário e o terceiro sobre a parte negativa do eixo real é a opção (C).

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{18} = i^{4\times4+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (-1) = \frac{i+i^2}{1^2-i^2} + 1 = \frac{-1+i}{1+1} + 1 = \frac{-1+i}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

1.2. Escrevendo $-i$ na f.t. para facilitar o cálculo do produto temos:
$-i = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, e logo:

$$-iz_2 = \left(\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \times \left(\operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{6} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

Logo $(-iz_2)^n = \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^n = \operatorname{cis}\left(n \times \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis} \frac{n\pi}{3}$

E como $-1 = \operatorname{cis} \pi$, temos que:

$(-iz_2)^n = -1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{cis} \frac{n\pi}{3} = \operatorname{cis} \pi$, pelo que $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, se atribuirmos valores a k temos:

- Se $k = -1$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(-1)\pi \;\Leftrightarrow\; n\pi = 3\pi - 6\pi \;\Leftrightarrow\; n = 3 - 6 \;\Leftrightarrow\; n = -3 \quad (\text{mas } -3 \notin \mathbb{N})$
- Se $k = 0$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(0)\pi \;\Leftrightarrow\; n\pi = 3\pi \;\Leftrightarrow\; n = 3 \quad (3 \in \mathbb{N})$
- Se $k = 1$, $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(1)\pi \;\Leftrightarrow\; n\pi = 3\pi + 6\pi \;\Leftrightarrow\; n = 3 + 6 \;\Leftrightarrow\; n = 9 \quad (9 \in \mathbb{N}, \text{ mas } 9 > 3)$

Logo que o menor valor natural de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$ é 3, para $k = 0$

2. Como os algarismos que compõem o número estão definidos, os números que satisfazem estas condições diferem entre si apenas na posição de colocação dos algarismos.
   Assim, selecionando 3 das 7 posições para serem ocupadas pelo algarismo «1» (sem considerar relevante a ordem porque estas posições serão ocupadas por algarismos iguais), temos ${}^7C_3$ colocações possíveis dos algarismos «1».
   Por cada uma das colocações anteriores, devemos ainda selecionar 2 das 4 posições disponíveis $(7-3=4)$ para colocar o algarismos «4», ou seja ${}^4C_2$ escolhas.
   As 2 posições ainda disponíveis $(7-3-2=2)$ serão ocupadas pelo algarismo «5», o que corresponde a ${}^2C_2 = 1$ escolha possível.
   Assim a quantidade de números diferentes que satisfazem as condições definidas é:

$${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 210$$

3.

   3.1. Como se pretende que as bolas tenham cor diferente, a extração da primeira bola não interfere com a ocorrência do acontecimento, porque existem mais do que uma bola de cada cor.
   Como a extração da segunda bola é feita sem reposição e depois da primeira, verificamos que, antes da extração da segunda bola, existem 19 bolas na caixa (número de casos possíveis), das quais 10 são de cor diferente da que já foi extraída (número de casos favoráveis).
   Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes, na forma de fração irredutível, é $\dfrac{10}{19}$

   3.2. No contexto da situação descrita $P((B \cap C)|A)$ é a probabilidade de a segunda bola retirada da caixa seja amarela e tenha um número par, sabendo que a primeira bola retirada é verde.
   De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
   Como a caixa tem 20 bolas e sabemos que foi extraída uma bola de cor verde, que não foi resposta, ficaram na caixa 19 bolas, ou seja, existem 19 casos possíveis, para a extração da segunda bola.
   Como sabemos que a primeira bola extraída é verde, logo tem um número inferior ou igual a 10, pelo que das bolas amarelas que estão na caixa, numeradas de 11 a 20, 5 têm números pares. Logo, o número de casos favoráveis é 5.
   Desta forma temos que $P((B \cap C)|A) = \dfrac{5}{19}$

4. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0$, pela definição assíntota, temos que a reta definida pela equação $y = 2x$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ e assim, como o declive da assíntota é 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

   Desta forma, averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx+b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} x = 2 + (+\infty) = +\infty$$

   Logo, como o domínio de g é $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

5.

5.1. Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[0{,}1; 0{,}3]$, porque $[0{,}1; 0{,}3] \subset \mathbb{R}^+$

Como $-1{,}08 < 0 < 0{,}62$, ou seja, $g(0{,}1) < 0 < g(0{,}3)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0{,}1; 0{,}3[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]0{,}1; 0{,}3[$

C.A.

$g(0{,}1) = e^{2\times 0{,}1} + \ln(0{,}1) \approx -1{,}08$

$g(0{,}3) = e^{2\times 0{,}3} + \ln(0{,}3) \approx 0{,}62$

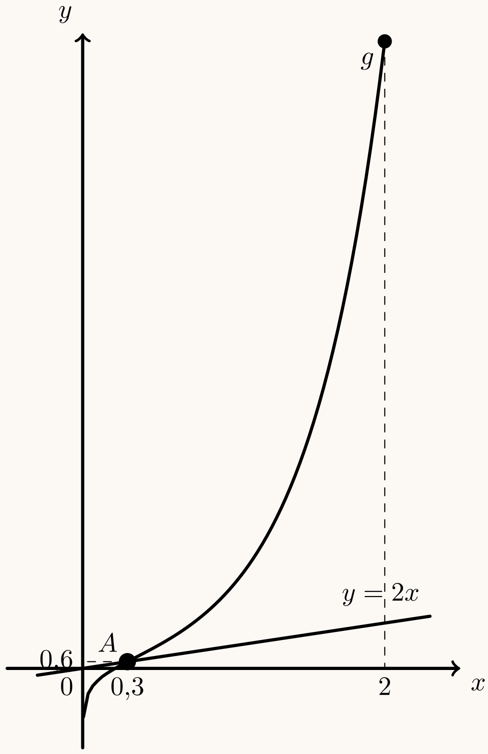
5.2. Os pontos em que a ordenada (y) é o dobro da abcissa ($2x$) estão sobre a reta de equação $y = 2x$. Assim o ponto A é a interseção do gráfico da função g com a reta de equação $y = 2x$, ou seja, a abcissa do ponto A é a solução da equação:

$$g(x) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + \ln x = 2x$$

Assim, traçando o gráfico da função g e a reta $y = 2x$, na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função g, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado, onde também está assinalado o ponto de interseção, ou seja o ponto A.

Depois, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, determinamos as coordenadas, aproximadas às décimas do ponto A:

$$A(0{,}3; 0{,}6)$$



6. Como os domínios de f e g são, respetivamente $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, então a condição $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em

$$]1, +\infty[\cap]-\infty, 2[=]1{,}2[$$

Assim, vem que:

$$f(x) \geq 1 + h(x) \;\Leftrightarrow\; \log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x) \;\Leftrightarrow\; \log_2(x-1) \geq \log_2 2 + \log_2(2-x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \log_2(x-1) \geq \log_2\left(2 \times (2-x)\right) \;\Leftrightarrow\; \log_2(x-1) \geq \log_2(4-2x) \;\Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow\; x - 1 \geq 4 - 2x \;\Leftrightarrow\; x + 2x \geq 4 + 1 \;\Leftrightarrow\; 3x \geq 5 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{5}{3}$$

Como $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em $]1{,}2[$, o conjunto solução é

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[\cap]1{,}2[= \left[\frac{5}{3}, 2\right[$$

7.

7.1. Calculando $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ temos que:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(2te^{-0,3t}\right) = 2(+\infty)\times e^{-0,3(+\infty)} = +\infty \times e^{-\infty} = +\infty \times 0^+ \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{0,3\times 2t}{0,3\times e^{0,3t}} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{2}{0,3}\times\frac{0,3t}{e^{0,3t}}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{0,3}\times \lim_{t\to+\infty} \frac{0,3t}{e^{0,3t}} =$$

(fazendo $y = 0,3t$, temos que se $t\to+\infty$, então $y\to+\infty$)

$$= \frac{2}{0,3}\times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = \frac{2}{0,3}\times \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \frac{2}{0,3}\times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{0,3}\times\frac{1}{+\infty} = \frac{2}{0,3}\times 0^+ = 0$$

Como $C(t)$ é a concentração do medicamento no sangue e t é o tempo decorrido após o medicamento ter sido ministrado, então $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$ significa, que a um período de tempo arbitrariamente grande ($t\to+\infty$), corresponde uma concentração de 0 mg/l de medicamento no sangue, ou seja, com o passar do tempo, o medicamento tende a desaparecer do sangue.

7.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(2te^{-0,3t}\right)' = (2t)'(e^{-0,3t}) + 2t\left(e^{-0,3t}\right)' = 2\times e^{-0,3t} + 2t(-0,3t)'e^{-0,3t} =$$

$$= 2e^{-0,3t} + 2t(-0,3)e^{-0,3t} = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2-0,6t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2-0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-0,3t}>0} \vee 2-0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{0,6} = t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{20}{6} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
C'	+	+	0	−
C	min	↗	Máx	↘

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$ podemos concluir que $\frac{10}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}\times 60 = 20$ ($\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos) temos que a concentração máxima do medicamento no sangue ocorreu 3 hora e 20 minutos após a toma, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.