

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

2011 - Prova especial

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, vem que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)(1 - P(A)) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times P(\bar{A}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(\bar{A})} = P(B)\end{aligned}$$

Como $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$, temos que:

$$P(B) = \frac{0,73 - 0,1}{0,9} = \frac{0,63}{0,9} = 0,7$$

Resposta: **Opção D**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:

R : «O aluno ser uma rapariga»

I : «O ter Inglês»

O número de raparigas que tem Inglês é $20 - 4 = 16$

Assim, como a turma tem 18 raparigas, o número de raparigas que não tem Inglês é $18 - 16 = 2$

Logo a probabilidade de selecionar um aluno que não tem inglês, de entre o conjunto das raparigas é

$$P(\bar{I}|R) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Resposta: **Opção A**

3. Como a soma dos três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 61 426 e o terceiro elemento dessa linha é 61 075 e, como sabemos que o primeiro é 1, podemos calcular o segundo número (b):

$$61\,426 = 1 + b + 61\,075 \Leftrightarrow 61\,426 - 1 - 61\,075 = b \Leftrightarrow b = 350$$

E assim podemos calcular os primeiros números da linha seguinte ($350 + 1 = 351$ e $350 + 61\,075 = 61\,425$):

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 350 & & 61\,075 & & \dots \\ & & & & & & & & \\ 1 & & & & 351 & & 61\,425 & & \dots\end{array}$$

Como a soma dos últimos três elementos de qualquer linha é igual à soma dos primeiros 3 elementos dessa linha, temos que a soma pretendida é:

$$61\,425 + 351 + 1 = 61\,777$$

Resposta: **Opção C**



4. Se $\lim u_n = k$, então $\lim f(u_n) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow k} f(x) = 3$

Calculado $k = \lim u_n$ e $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$ para cada uma das sucessões apresentadas, temos:

- $\lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (e^x - 1) = e^{2^-} - 1 = e^2 - 1$
- $\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{2^+} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\lim u_n = \lim \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - \frac{1}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{3^-} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$
- $\lim u_n = \lim \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$
E assim, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = \frac{4}{3^+} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = \frac{7}{3}$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única sucessão em que $\lim f(u_n) = 3$ é $2 + \frac{1}{n}$

Resposta: **Opção B**

5. Podemos descrever a variação do sinal de h' , pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h :

x		0	
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

6. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = ((2x - 1) \times f(x))' = (2x - 1)'f(x) + (2x - 1)(f(x))' = 2f(x) + (2x - 1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x - 1)f'(1) = 2 \times 1 + (2(1) - 1) \times 1 = 2 + 1 \times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1) - 1) \times f(1) = (2 - 1) \times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.

Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 - 3 = b \Leftrightarrow -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**



7. Usando a fórmula de Moivre para a radiciação temos que:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8} \operatorname{cis} \left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} \right), k \in \{0,1,2,3,4,5\}, \text{ temos que}$$

- $|w| = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

- Para cada $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $\arg(w) = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6} = \frac{\pi}{36} + \frac{12k\pi}{36} = \frac{\pi + 12k\pi}{36}$

Assim, se $k = 2$, temos que $\arg(w) = \frac{\pi + 24\pi}{36} = \frac{25\pi}{36}$

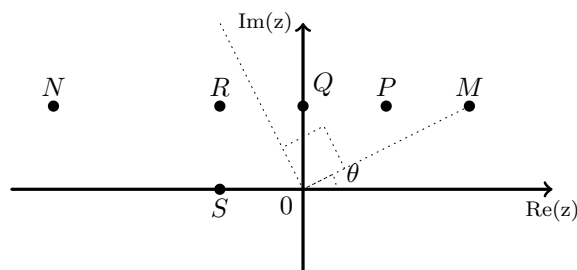
Resposta: **Opção A**

8. Como o ponto M é a imagem geométrica do número complexo z_1 que vamos designar por $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ porque M é um ponto do primeiro quadrante e $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Im}(z_1)$.

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto S porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_3 \operatorname{cis} \pi$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1 \rho_3 \operatorname{cis} (\pi + \theta)$; e como $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto Q porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1 \rho_4 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$; ou seja a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta OM pelo ponto O e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto P porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_5 \operatorname{cis} \alpha$, e assim, $z_1 \times z = \rho_1 \rho_5 \operatorname{cis} (\theta + \alpha)$; e como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do quadrante definido pela reta OM e pela perpendicular pelo ponto O e não o ponto N

Logo o ponto R é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

1.1. Resolvendo a equação, vem:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1^2 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times (-1)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{C.S.: } \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

Como w é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

$$\bullet \rho = |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}; \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2^\circ \text{ quadrante, logo}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Assim } z_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \quad \text{e logo } \frac{1}{w} = \frac{1 \operatorname{cis} 0}{\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{1} \operatorname{cis} \left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assim temos que $\bar{z} = a - bi$, pelo que:

$$(\bar{z} + i) \times (z - i) = (a - bi + i)(a + bi - i) = a^2 + abi - ai - abi - b^2i^2 + bi^2 + ai + bi^2 - i^2 =$$
$$= a^2 - b^2(-1) + b(-1) + b(-1) - (-1) = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\text{E como } |z - i|^2 = |a + bi - i|^2 = |a + i(b - 1)|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b - 1)^2}\right)^2 = a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\text{Temos que } (\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$$

2.

2.1. Como o João escolhe 4 cores de entre um conjunto de 12, e cada cor se destina a pintar uma das faces numeradas, a ordem da seleção é relevante. Assim, o João pode pintar o tetraedro de ${}^{12}A_4$ formas diferentes, sendo este o número de casos possíveis.

Se pretendermos que a cor preferida do João esteja entre as cores escolhidas, ainda podemos pintar qualquer uma das 4 faces com essa cor, pelo que existem 4 casos a considerar.

Por cada um destes 4 casos, devemos selecionar 3 cores de entre as restantes 11, considerando a ordem relevante. Ou seja, o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{11}A_3$

Assim, a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João é

$$\frac{4 \times {}^{11}A_3}{{}^{12}A_4} = \frac{1}{3}$$



- 2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair a face com o número 1» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1)
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade da face com o número 1, ocorrer 0,1,2 ou 3 vezes, temos:

- $P(X = 0) = {}^3 C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 1) = {}^3 C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \times 1 \times 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 2) = {}^3 C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 1 \times 3}{4^3} = \frac{9}{64}$
- $P(X = 3) = {}^3 C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^3} \times 1 = \frac{1}{64}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

- 2.3. No contexto da situação descrita, $P(J|I)$ é a probabilidade de que ao lançar 4 vezes o tetraedro, a soma dos números registados nos quatro lançamentos seja menor do que 10, sabendo que nos 3 primeiros lançamentos saiu sempre o número dois.

Como sabemos que a soma relativa aos 3 primeiros lançamentos é $2 + 2 + 2 = 6$, para que a soma dos 4 lançamentos seja inferior a 10, no último lançamento podem sair as faces com os números, um (que resultará na soma 7), dois (soma 8) ou três (soma 9).

Assim, usando a Regra de Laplace, para a determinação da probabilidade, temos 4 casos possíveis, correspondentes às faces que podem sair no quarto lançamento, e 3 casos favoráveis, correspondendo às faces que correspondem a uma soma inferior a 10, pelo que

$$P(J|I) = \frac{3}{4}$$

3.

- 3.1. Sabendo que $M = 7,1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$:

$$7,1 = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9 \Leftrightarrow \frac{(7,1 + 2,9) \times 3}{2} = \log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E) = 15 \Leftrightarrow E = 10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$\begin{aligned} 10^{15} &= M_0 \times 1,6 \times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1,6 \times 10^{-5}} = M_0 \Leftrightarrow M_0 = 0,625 \times 10^{15} \times 10^5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_0 = 6,25 \times 10^{-1} \times 10^{20} \Leftrightarrow M_0 = 6,25 \times 10^{19} \end{aligned}$$



3.2. Sabemos que $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$.

Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2 .

Assim, temos que $M_1 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9$ e $M_2 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9$, pelo que

$$M_1 - M_2 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \left(\frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9 \right)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \left(\frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9 \right) &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) + 2,9 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) \right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^1 \Leftrightarrow E_1 = 10 \times E_2 \end{aligned}$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2 .

4.

4.1. Sabendo que f é contínua em $x = 1$, temos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, e mais especificamente que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

Como $f(1) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(k + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(e^{x-1} - 1)}{x-1} = \\ &= k - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \stackrel{(1)}{=} k - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = k - 1 \end{aligned}$$

(1) Se $y = x - 1$, então como $x \rightarrow 1^-$, logo $y \rightarrow 0^-$

Assim, como f é contínua em $x = 1$ temos que $f(1) = k - 1$, ou seja

$$-1 = k - 1 \Leftrightarrow k = 0$$

4.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = 3 + \frac{1 - e^{-\infty-1}}{-\infty - 1} = 3 + \frac{1 - 0}{-\infty} = 3 - 0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x \rightarrow -\infty$)

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \right) = +\infty \times (-1 + 0) = +\infty \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja, $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f



5. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2 \cos x)' = (x)' - (2 \cos x)' = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2 \sin x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos C e D :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores inteiros a k , podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6} (k = 0) \text{ e } x = -\frac{5\pi}{6} (k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi)$$

Assim, estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g , vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

6. Considerando a abcissa x do ponto A , como a medida do lado horizontal do retângulo e a medida (correspondente) do lado vertical é $f(x)$, ou seja, a área $A_{[OACB]}$ é dada pela função g definida, pela condição:

$$g(x) = x \times f(x) = x \left(2 + 15 \ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)\right), (g(x) \geq 0)$$

Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função g , numa janela compatível com o domínio, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Utilizando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para o maximizante (e para o máximo) da função, determinamos as coordenadas do ponto $M(2,47; 25,99)$, o que nos permite concluir que o retângulo $[OACB]$ tem área máxima quando o ponto A (e o ponto C) tem abcissa $x \approx 2,5$

