Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2011 - 1ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

---

1. A igualdade da opção A é válida para acontecimentos contrários, a igualdade da opção B é válida para acontecimentos incompatíveis e a condição da opção C é válida para acontecimentos não equiprováveis. Como A e B são dois acontecimentos independentes, sabemos que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ e assim temos que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Resposta: **Opção D**

2. Como o código tem 4 algarismos e sabemos que 2 deles são «7» e os restantes 2 são diferentes de «7», podemos começar por calcular o número de situações diferentes em que os algarismos 7 podem ser dispostos ($^4C_2$, que corresponde a selecionar 2 das 4 posições do código, sem considerar a ordem, porque estas posições serão ambas ocupadas por algarismos iguais - o algarismo «7»).
Depois, por cada uma destas escolhas, existem 9 hipóteses (todos os algarismos à excepção do «7») para ocupar a primeira posição não ocupada, e outras 9 para a segunda posição não ocupada, pelo que o número total de códigos pode ser calculado como

$$^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$$

Resposta: **Opção A**

3. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g, temos que

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - \big(2x - 4\big)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

4. Analisando cada uma das opções, temos

- Como $f(0) = 2^0 - 9 = 1 - 9 = -8$ e $f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$, não se verifica a condição $f(0) < 0 < f(1)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0,1[$
- Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2^x - 9) = 2^5 - 9 = 23$ e $f(5) = \dfrac{1-e^5}{5}$, temos que $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) \neq f(5)$, pelo que a função f não é contínua para $x = 5$, logo não é contínua no intervalo $]4,6[$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f nesse intervalo
- Como $f(6) = \dfrac{1-e^6}{6} \approx -67$ e $f(7) = \dfrac{1-e^7}{7} \approx -157$, não se verifica a condição $f(6) < 0 < f(7)$, pelo que o teorema de Bolzano não permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]6,7[$

Assim, de entre as opções apresentadas o intervalo]1,4[é o único em que o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f:

	C.A.
Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em [0,5[, é contínua em [0,5[, e também, em [1,4], porque $[1,4] \subset [0,5[$	$f(1) = 2^1 - 9 = 2 - 9 = -7$
Como $-7 < 0 < 7$, ou seja, $f(1) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,4[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função f no intervalo]1,4[	$f(4) = 2^4 - 9 = 16 - 9 = 7$

Resposta: **Opção B**

5.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 =$$

(fazendo $y = \frac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção C**

6. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

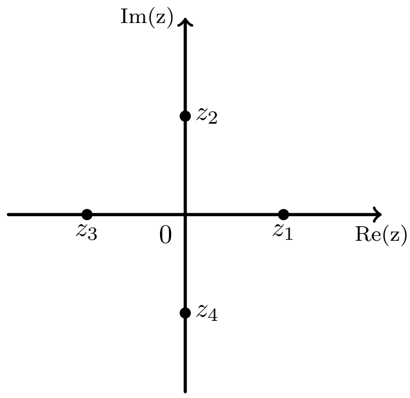
- Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
- Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
- Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

Assim, temos que:

- $f'(0) \times f'(6) < 0$
- $f'(-3) \times f'(6) > 0$
- $f'(-3) \times f'(0) < 0$
- $f'(0) \times f'(6) < 0$

Resposta: **Opção D**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.



   Assim,

   - como $4n = 4 \times n \mathbf{+0}$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
   - como $4n + 1 = 4 \times n \mathbf{+1}$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
   - como $4n + 2 = 4 \times n \mathbf{+2}$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

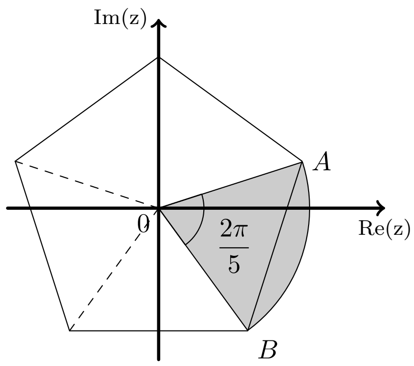
   Assim temos que:

   $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$, pelo que, de acordo com a figura, temos que $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

   Resposta: **Opção B**

8. Como a área do setor circular é dada por $\frac{\alpha r^2}{2}$, onde α é a amplitude do ângulo ao centro do setor circular e r o raio da circunferência, e designado por w o número complexos que tem por imagem geométrica o ponto A, temos que:

   - $r = |w| = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ (usando a fórmula de Moivre);
   - α é a amplitude do ângulo AOB e como A e B são vértices adjacentes de um pentágono regular centrado na origem (por serem raízes de índice 5 de um mesmo número complexo) temos que $\alpha = \frac{2\pi}{5}$



   Logo o valor da área do setor circular AOB é

$$\frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 2^2}{2} = \frac{2\pi}{5} \times 2 = \frac{4\pi}{5}$$

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

   1.1. Como z_1 é raíz do polinómio, este é divisível por $(z - 1)$, pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

   E assim temos que
   $z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z - 1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z - 1)(z^2 + 16)$

   Podemos agora determinar as raízes do polinómio $z^2 + 16$ (que também são raízes do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$) resolvendo a equação $z^2 + 16 = 0$:

$$z^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{-16} \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \quad \Leftrightarrow \quad z = 4i \ \vee \ z = -4i$$

   Escrevendo as raízes encontradas na f.t., temos:
   $z = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2} \ \vee \ z = 4\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

1.2. Começamos por escrever z_2 na f.t. e calcular o produto $z_2 \times z_3$ na f.t.:

Como z_2 é um imaginário puro, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ e $|z_2| = 5$, pelo que $z_2 = 5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

Assim temos que:
$z_2 \times z_3 = \left(5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right)\right) = (5 \times 1) \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{40} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5 \operatorname{cis} \frac{20\pi + n\pi}{40}$

Como a representação geométrica do número complexo $z_2 \times z_3$ está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se
$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, vem que:

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{50\pi + 80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 + n = 50 + 80k \Leftrightarrow n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo k por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$, temos $n = -50$;
- $k = 0$, temos $n = 30$;
- $k = 1$, temos $n = 110$;

Logo, o menor valor natural de n é 30.

2.

2.1. Como a experiência ≪*Um jovem compra o bilhete*≫ se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de jovens que usa o multibanco no pagamento*≫, segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = ^n C_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 9$ (serão comprados bilhetes 9 vezes de forma independente).
- $p = 0{,}6$ (é a probabilidade do sucesso, ou seja "*O jovem usa o multibanco no pagamento*")
- $q = 0{,}4$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Assim, calculando da ocorrência de 6 sucessos ($k = 6$) no conjunto das 9 repetições da experiência, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 6) = ^9 C_6\, (0{,}6)^6\, (0{,}4)^3 \approx 0{,}25$$

2.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, um cliente desta companhia aérea, e os acontecimentos:
B:≪O cliente ter comprado um bilhete para Berlim≫
V:≪O cliente faz a viagem sem perder o voo≫
Temos que $P\left(\overline{V}|B\right) = \frac{5}{100} = 0{,}05$, $P\left(V|\overline{B}\right) = \frac{92}{100} = 0{,}92$ e $P(B) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V} \cap B\right) = P(B) \times P\left(\overline{V}|B\right) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$
- $P\left(\overline{B}\right) = P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $P\left(V \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P\left(V|\overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}92 = 0{,}644$
- $P\left(\overline{V} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(V \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}664 = 0{,}056$

	B	$\overline{B}$	
V		0,644	
$\overline{V}$	0,015	0,056	0,071
	0,3	0,7	1

Assim, calculando a probabilidade de um passageiro desta companhia aérea perder o voo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$P\left(\overline{V}\right) = P\left(\overline{V} \cap B\right) + P\left(\overline{V} \cap \overline{B}\right) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071$$

3. Temos que,

$$\begin{aligned}
1-\frac{1-P(B)}{P(A)} &= \frac{P(A)}{P(A)}-\frac{1-P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A)-1+P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A)+P(B)-\left(P(A\cup B)+P\left(\overline{A\cup B}\right)\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X)+P\left(\overline{X}\right)=1 \\
&= \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A\cap B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Teorema: } P(X\cap Y)=P(X)-P(Y)-P(X\cup Y) \\
&= \frac{P(A\cap B)}{P(A)}-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \\
&= P(B|A)-\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} && \text{Definição: } P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}
\end{aligned}$$

Logo $1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}=P(B|A)-\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A)=1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}+\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)}$

Como $\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(A)}\geq 0$, então $P(B|A)\geq 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}$ *q.e.d.*

4. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$T'(t)=\left(15+0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)'=(15)'+\left(0{,}1t^2e^{-0{,}15t}\right)'=0+0{,}1\left((t^2)'e^{-0{,}15t}+t^2(e^{-0{,}15t})'\right)=$$
$$=0{,}1\left(2t\times e^{-0{,}15t}+t^2(-0{,}15)e^{-0{,}15t}\right)=0{,}1\left(2te^{-0{,}15t}-0{,}15t^2e^{-0{,}15t}\right)=$$
$$=0{,}2te^{-0{,}15t}-0{,}015t^2e^{-0{,}15t}=te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$T'(t)=0 \;\Leftrightarrow\; te^{-0{,}15t}(0{,}2-0{,}015t)=0 \;\Leftrightarrow\; t=0 \vee \underbrace{e^{-0{,}15t}=0}_{\text{Eq. Imp.},e^{-0{,}15t}>0} \vee\, 0{,}2-0{,}015t=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; t=0 \vee 0{,}2=0{,}015t \;\Leftrightarrow\; t=0 \vee \frac{0{,}2}{0{,}015}=t \;\Leftrightarrow\; t=0 \vee t=\frac{40}{3}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(x)$	0	+	0	−	−
$T(x)$	min	↗	Máx	↘	

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0,\frac{40}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{40}{3},20\right]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3}\approx 13{,}333$ corresponde a 13 horas e $0{,}333\times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

5.

5.1. Averiguando a existência de assintotas horizontais, temos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty-1} = \frac{3}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0+0 = 0$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assintota horizontal do gráfico de f.

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{(0+\frac{1}{x})(x) - (2+\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abcissa e, é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-1-1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa e, temos:

$$f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abcissa e, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abcissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assintota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \wedge y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e^2}{2e} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de interseção da assintota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e, são

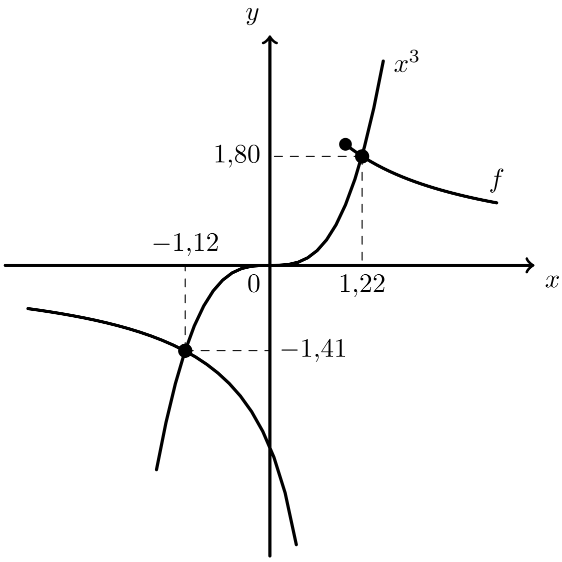
$$P\left(\frac{5e}{2},0\right)$$

5.2. Os pontos do plano cuja ordenada é o cubo da abcissa estão sobre o gráfico da função $g(x) = x^3$.

Assim, as abcissas dos pontos do gráfico de f que verificam esta condição são as soluções da equaçao:

$$f(x) = x^3$$

Logo, traçando na calculadora o gráfico da função f, respeitando o domínio de cada um dos ramos, e a função $g(x) = x^3$ numa janela que permita identificar os pontos de interseção dos gráficos, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor das coordenadas dos dois pontos em que o gráfico da função f interseta o gráfico da função g. Os valores das coordenadas (com aproximação às centésimas) são $(-1{,}12; -1.41)$ e $(1{,}22{,}1{,}80)$

6.

6.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

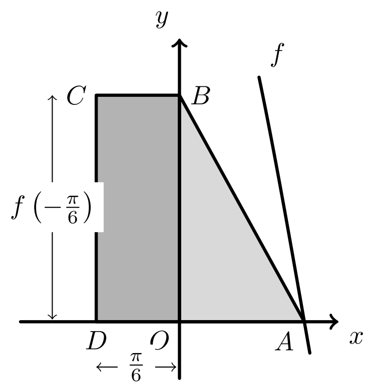
A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C:

$$\overline{DC} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$



A altura do triângulo também é ordenada do ponto C, $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor é a abcissa do ponto $\overline{OA}$, ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.

Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \dfrac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

6.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f, vem:

$$f'(x) = (4\cos(2x))' = 4(2x)'(-\operatorname{sen}(2x)) = 4 \times 2 \times (-\operatorname{sen}(2x)) = -8\operatorname{sen}(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8\operatorname{sen}(2x))' = -8(2x)'\cos(2x) = -16\cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real x,

$$f(x)+f'(x)+f''(x) = \Big(4\cos(2x)\Big)+\Big(-8\operatorname{sen}(2x)\Big)+\Big(-16\cos(2x)\Big) = 4\cos(2x)-16\cos(2x)-8\operatorname{sen}(2x) =$$

$$= -12\cos(2x) - 8\operatorname{sen}(2x) = -4 \times 3\cos(2x) - 4 \times 2\operatorname{sen}(2x) = -4\Big(3\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)\Big)\ , \quad q.e.d.$$