

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2011 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como no lote existem em total de 30 caixas, ao selecionar 4, podemos obter um conjunto de ${}^{30}C_4$ amostras diferentes, ou seja, ${}^{30}C_4$ casos possíveis.

O número de casos favoráveis corresponde a todos os lotes de 4 caixas do medicamento Y, ou seja conjuntos de 4 caixas escolhidas de entre as 20 caixas de medicamento Y, ou seja, ${}^{20}C_4$ hipóteses.

Assim, a probabilidade de selecionar um lote 4 as caixas e serem todas do medicamento Y é $\frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4}$

Resposta: **Opção B**

2. Como $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 2a + a = 3a$ e $P(X = 5) = \frac{1}{10}$, temos que:

$$P(X \leq 1) = 3P(X = 5) \Leftrightarrow 3a = 3 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Também sabemos que:

$$2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow 3a + 3b = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a + 3b = \frac{9}{10}$$

Substituindo o valor de a , temos:

$$3 \times \frac{1}{10} + 3b = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{6}{10}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{6}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção D**

3. Como $a \in \mathbb{R}^+$, e a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 0$, sabemos que a distribuição é simétrica relativamente à reta $x = 0$.

Assim, como $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0,5$, temos que:

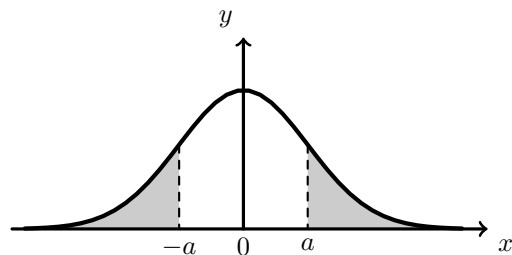
- Como $a > 0$, então $P(X \geq a) < 0,5$, logo $P(X \leq -a) < 0,5$
- $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$, pelo que, $P(X \leq a) > 0,5$ e também $P(X \geq -a) > 0,5$

Desta forma podemos afirmar que:

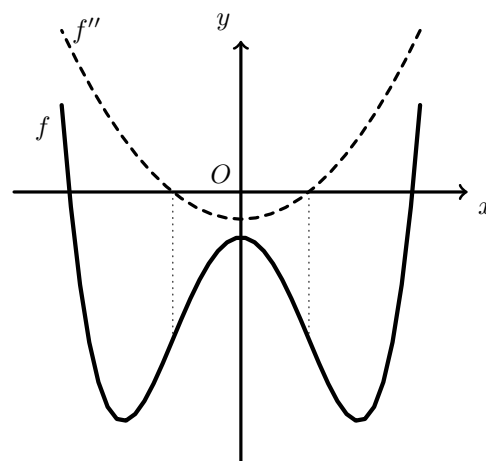
- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) > 0$
- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) < 1$
- $P(X \leq a) > P(X \geq a)$

Como a distribuição é simétrica e a e $-a$ são valores equidistantes do valor médio, temos que $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

Resposta: **Opção B**



4. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abscissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função f tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.



O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de f , mas esta função é negativa quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.

Resposta: **Opção D**

5. Como a função g é contínua, é contínua em $x = 0$, ou seja, verifica a condição: $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
Assim, temos que:

- $g(0) = \ln(k - 0) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(k - x)) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{3x} = \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

Logo, temos que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow \ln k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{e}$

Resposta: **Opção A**

6. Como $\overline{OA} = 1$, usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \text{sen } \theta$$

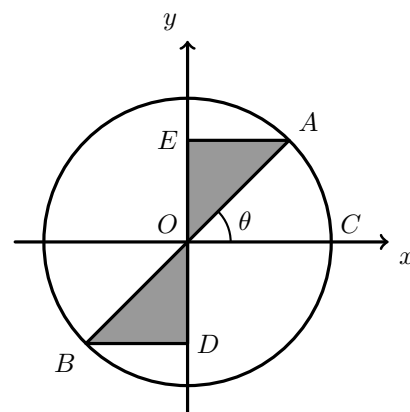
$$\text{cos } \theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \text{cos } \theta = \frac{\overline{EA}}{1} \Leftrightarrow \overline{EA} = \text{cos } \theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como $\overline{AO} = \overline{OB}$; $\overline{BD} = \overline{EA}$ e $\overline{DO} = \overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2 \text{cos } \theta + 2 \text{sen } \theta = 2(1 + \text{cos } \theta + \text{sen } \theta)$$



Resposta: **Opção C**



7. A região apresentada na figura é definida pelo interior da circunferência de centro na origem e raio \overline{OA} e pelo conjunto de pontos que representam números complexos com argumentos compreendidos entre $\arg(-\sqrt{3} + i)$ e π . Assim temos que

$$\overline{OA} = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

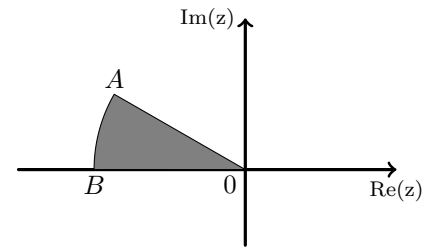
E, sendo $\theta = \arg(-\sqrt{3} + i)$, vem que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2^\circ \text{ quadrante,}$$

$$\operatorname{logo} \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Desta forma } |z| < |-\sqrt{3} + i| \wedge \arg(-\sqrt{3} + i) \leq \arg(z) \leq \pi \Leftrightarrow |z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$$

Resposta: **Opção B**

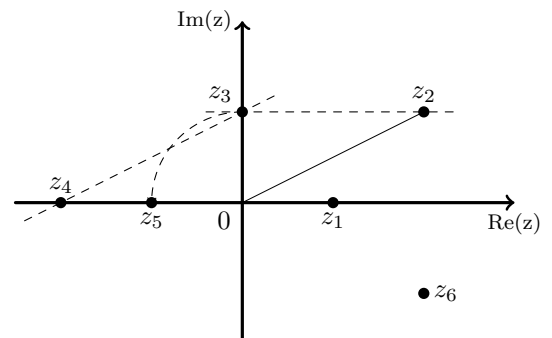


8. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de z_2 e de z_4 e temos que $z_2 + z_4 = z_3$

A operação "multiplicar por i " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ ", pelo que $z_3 \times i = z_5$.

$$\text{Logo } (z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5.$$

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1.

- 1.1. Como $i^{4n+3} = i^3 = -i$, vem que:

$$z_1 \times i^{4n+3} - b = (1 + 2i)(-i) - b = -i - 2i^2 - b = -i - 2(-1) - b = 2 - b - i$$

E como:

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -1 - i$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right)} = \frac{2 - b - i}{-1 - i} = \frac{(2 - b - i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = \frac{-2 + b + i + 2i - bi - i^2}{(-1)^2 - i^2} = \\ &= \frac{-2 + b + 3i - bi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-2 + 1 + b + i(3 - b)}{1 + 1} = \frac{-1 + b + i(3 - b)}{2} = \frac{-1 + b}{2} + \frac{3 - b}{2} i \end{aligned}$$

Assim para que w seja um número real, $\operatorname{Im}(w) = 0$, ou seja:

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 - b = 0 \Leftrightarrow 3 = b$$



1.2. Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Temos que:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pelo que se $|z| = 1$ então:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

- $|1 + z|^2 = |1 + a + bi|^2 = (\sqrt{(1+a)^2 + b^2})^2 = (\sqrt{1 + 2a + a^2 + b^2})^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2$

- $|1 - z|^2 = |1 - a - bi|^2 = (\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2})^2 = (\sqrt{1 - 2a + a^2 + b^2})^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2$

Assim temos que:

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2a^2 + 2b^2 = 2 + 2(a^2 + b^2) = 2 + 2(1) = 4$$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um funcionário da empresa, e os acontecimentos:

L : «O funcionário é licenciado»

Q : «O funcionário tem idade não inferior a 40 anos»

Temos que $P(L) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P(Q|L) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ e $P(\overline{Q}|\overline{L}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(L \cap \overline{Q}) = P(L) \times P(\overline{Q}|L) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$

- $P(\overline{L}) = 1 - P(L) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

- $P(\overline{L} \cap \overline{Q}) = P(\overline{L}) \times P(\overline{Q}|\overline{L}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$

- $P(\overline{Q}) = P(L \cap \overline{Q}) + P(\overline{L} \cap \overline{Q}) = \frac{12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{13}{25}$

- $P(L \cap Q) = P(L) - P(L \cap \overline{Q}) = \frac{3}{5} - \frac{12}{25} = \frac{3}{25}$

- $P(Q) = 1 - P(\overline{L}) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$

	L	\overline{L}	
Q	$\frac{3}{25}$		$\frac{12}{25}$
\overline{Q}	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{13}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa e ele ser licenciado, sabendo que tem uma idade não inferior a 40 anos, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(L|Q) = \frac{P(L \cap Q)}{P(Q)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$



2.2. A resposta correta é a **Resposta II**.

Relativamente a esta resposta, o número de formas diferentes de escolher os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho, é calculado como a soma dos números de casos de duas situações distintas:

- 2 dos 3 funcionários escolhidos são favoráveis à alteração, ou seja, escolher 1 funcionário de entre os 6 que não estão no grupo dos que são favoráveis, e por cada uma das 6 escolhas possíveis, escolher um conjunto de 2 de entre os 9 trabalhadores que são favoráveis ($6 \times {}^9C_2$);
- escolher 3 trabalhadores que sejam favoráveis à alteração, ou seja, escolher um grupo de 3, do conjunto de 9 trabalhadores que são favoráveis (9C_3).

Outra forma de fazer este cálculo, consiste em subtrair ao total dos conjuntos de 3 trabalhadores que podemos fazer com os 15 funcionários (${}^{15}C_3$), o número de grupos onde nenhum trabalhador é favorável à alteração, ou apenas 1 é favorável à alteração.

Observando a Resposta I, podemos identificar este raciocínio, embora tenham sido subtraídos apenas os conjuntos em que nenhum trabalhador é favorável (6C_3 , que consiste em calcular o número de conjuntos de 3 que podemos fazer com os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis). Assim, para que o cálculo fique correto, deve ser ainda subtraído o número ${}^6C_2 \times 9$, ou seja, o número de conjuntos em que são escolhidos 2 de entre os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis e um terceiro trabalhador do grupo dos 9 apoiantes da alteração. Desta forma, alterando a Resposta I para: ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - {}^6C_2 \times 9$, obtemos outra resposta correta.

3.

3.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A, ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 0}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^0} = \frac{120}{1 + 7 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A, 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 7}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1,4}} \approx 44,02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A, nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44,02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$



3.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$\begin{aligned} N_A(t) = N_B(t) &\Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120 (1 + 50 \times e^{-0,4t}) = 150 (1 + 7 \times e^{-0,2t}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 120 + 6000 \times e^{-0,4t} = 150 + 1050 \times e^{-0,2t} \Leftrightarrow 6000 \times e^{-0,4t} - 1050 \times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6000 \times (e^{-0,2t})^2 - 1050 \times e^{-0,2t} - 30 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 6000y^2 - 1050y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)} \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm 1350}{12000} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = -\frac{1}{40} \vee y = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40} \vee e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0,2} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 5}{-0,2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{0,2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

4. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f , no ponto B , é 8, porque a tangente a uma reta de declive 8.

Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é $m = f'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f :

$$f'(x) = (e^{2x} + \cos x - 2x^2)' = (e^{2x})' + (\cos x)' - (2x^2)' = 2e^{2x} - \sin x - 4x$$

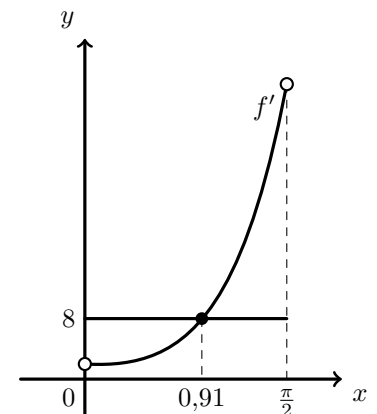
Assim, como $m = f'(x)$ e $m = 8$, temos que a abcissa do ponto B é a solução da equação:

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow 2e^{2x} - \sin x - 4x = 8$$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função f' e a reta de equação $y = 8$ numa janela compatível com o domínio de f (que coincide com o domínio de f'), que se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor da abcissa (com aproximação às centésimas) do ponto do gráfico de f' que tem ordenada 8, ou seja a abcissa do ponto B :

$$x \approx 0,91$$



5.

5.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, em $[0,2[$ e em $[2, +\infty[$ é contínua em $[0,2[$ e em $[2, +\infty[$, e como o seu domínio é $[0, +\infty[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x = 2$

Para averiguar se a reta de equação $x = 2$ é assíntota do gráfico de f , vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \frac{e^{2-2^-} - 1}{2^- - 2} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminação})$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} \right) = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2}$$

(fazendo $y = 2 - x$, temos que se $x \rightarrow 2^-$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ é um valor finito, concluímos que a reta de equação $x = 2$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

5.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,2[$, é contínua em $[0,2[$, e também, em $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, porque $\left]0, \frac{1}{2}\right] \subset [0,2[$

Como $-3,19 < -3 < -2,32$, ou seja, $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tal que $f(c) = -3$, ou seja, que a equação $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

C.A.

$$f(0) = \frac{e^{2-0} - 1}{0 - 2} = \frac{e^2 - 1}{-2} \approx -3,19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{-\frac{3}{2}} \approx -2,32$$



5.3. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{\ln(x+1)} \right)' &= \frac{(x+1)' \ln(x+1) - (x+1)(\ln(x+1))'}{(\ln(x+1))^2} = \frac{(1+0) \ln(x+1) - (x+1) \times \frac{(x+1)'}{(x+1)}}{(\ln(x+1))^2} = \\ &= \frac{\ln(x+1) - (x+1)'}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2} = 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 1 = 0 \wedge \underbrace{(\ln(x+1))^2 \neq 0}_{PV, x > 2 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln 3} \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1) = e^1 \Leftrightarrow x = e - 1 \end{aligned}$$

Logo, como $e - 1 < 2$, a função derivada não tem zeros em $]2, +\infty[$.

Como, para $x > 2$,

- $\ln(x+1) - 1 > \ln(3) - 1$, temos que $\ln(x+1) - 1 > 0, \forall x \in]2, +\infty[$
- $\ln(x+1) \neq 0$, temos que $(\ln(x+1))^2 > 0, \forall x \in]2, +\infty[$

temos que f' é sempre positiva no intervalo $]2, +\infty[$, o que significa que a função f é sempre crescente neste intervalo.

6. Começamos por determinar $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx))' = (a \cos(nx))' + (b \operatorname{sen}(nx))' = a(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) + (b(nx)') \cos(nx) = \\ &= -an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx) \end{aligned}$$

Determinamos em seguida $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (-an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx))' = (-an \operatorname{sen}(nx))' + (bn \cos(nx))' = \\ &= -an(nx)' \cos(nx) + bn(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \operatorname{sen}(nx) = \\ &= -n^2 (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)) = \\ &= -n^2 (f(x)) \end{aligned}$$

Assim temos que: $f''(x) + n^2 f(x) = -n^2 f(x) + n^2 f(x) = 0, \text{ q.e.d.}$

