

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2012 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para calcular o número de códigos diferentes, de acordo com as restrições impostas, podemos começar por escolher a posição do «2», e assim existem 7 posições possíveis.
Por cada uma das 7 escolhas anteriores, escolhemos outras duas posições (de entre as 6 disponíveis para posicionar os «5», logo existem 6C_2 escolhas diferentes.
Como as restantes posições são todas ocupadas por «a», a colocação dos «a» corresponde a uma única hipótese de posicionamento. Assim temos que o número total de hipóteses possíveis é

$$7 \times {}^6C_2 \times 1 = 105$$

Resposta: **Opção A**

2. Como o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$, temos que:

$$\frac{35}{24} = 0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 0 + a + 4a \Leftrightarrow \frac{35}{24} = 5a \Leftrightarrow \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = a \Leftrightarrow \frac{7}{24} = a$$

Também sabemos que:

$$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - 3a$$

Substituindo o valor de a , temos:

$$b^3 = 1 - 3 \times \frac{7}{24} \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{24}{24} - \frac{21}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

3. Como o penúltimo elemento da linha do triângulo de Pascal é 111, sabemos que essa linha tem 112 elementos, todas da forma ${}^{112}C_n$.

Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 10^5 :

$${}^{111}C_0 = {}^{111}C_{111} (= 1); {}^{111}C_1 = {}^{111}C_{110} (= 111) \text{ e ainda } {}^{111}C_2 = {}^{111}C_{109} (= 6105)$$

Porque

$${}^{111}C_3 = {}^{111}C_{108} = 221\,815 \text{ e todos os restantes são superiores a estes.}$$

Logo, sabemos que existem $112 - 6 = 106$ elementos superiores a 10^5 , num total de 112, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$

Resposta: **Opção B**



4. Como (x_n) é uma sucessão com termos em $] -1, 1[$ e $\lim(x_n) = 1$, então

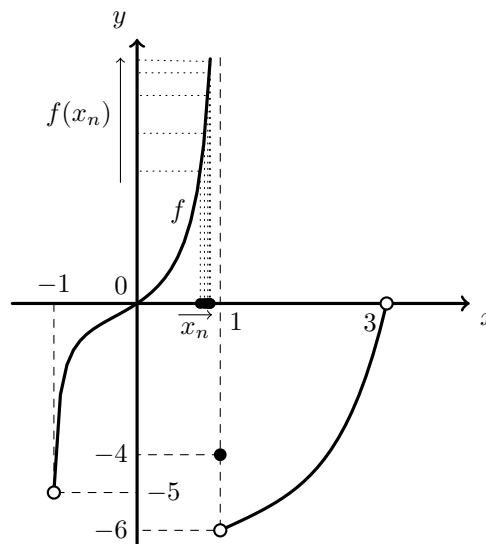
$$\lim x_n = 1^-$$

E assim, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando (x_n) tende para 1

Resposta: **Opção A**



5. Sabemos que o declive da reta tangente (m) por ser calculado por:

- a tangente da inclinação: $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$
- o valor da derivada no ponto de abscissa a
Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln \left(\frac{x}{3} + 2 \right) \right)' = \frac{\left(\frac{x}{3} + 2 \right)'}{\frac{x}{3} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{3} \right)' + (2)'}{\frac{x}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

$$\text{Logo, } m = f'(a) = \frac{1}{a+6}$$

Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \Leftrightarrow 1 = a+6 \wedge a \neq -6 \Leftrightarrow a = -5$$

Resposta: **Opção D**

6. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b$, então como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$, temos que a reta definida por $y = 2x + 1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f

Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

Resposta: **Opção B**



7. Como $\bar{z}_2 = 3 + ki$ temos:

$$z_1 \times \bar{z}_2 = (2 + i)(3 + ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k + 3) = (6 - k) + (2k + 3)i$$

Para que $z_1 \times \bar{z}_2$ seja um imaginário puro $\text{Re}(z_1 \times \bar{z}_2) = 0$

$$\text{Logo } 6 - k = 0 \Leftrightarrow 6 = k$$

Resposta: **Opção D**

8. Designado por z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos F e A , respetivamente. Assim temos que $|z| = |w| = 3$, porque os pontos A e F estão a igual distância da origem.

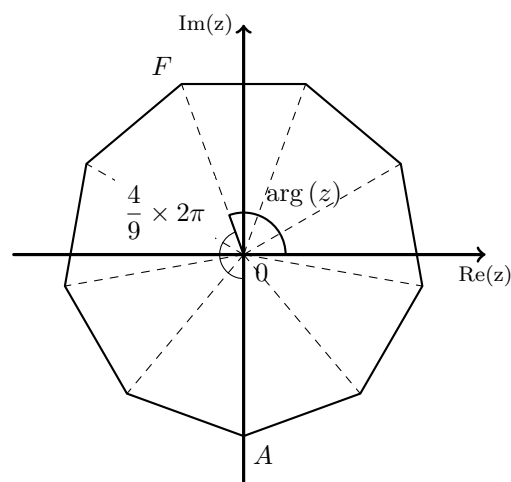
Sabemos que o ângulo FOA tem amplitude $\frac{4}{9} \times 2\pi = \frac{8\pi}{9}$, porque os vértices do polígono dividem o ângulo giro em 9 partes iguais.

$$\text{Logo } \arg(w) = \arg(z) + \frac{10\pi}{9}$$

Como o ponto A está sobre a parte negativa do eixo imaginário temos que $\arg(w) = \frac{3\pi}{2}$, pelo que, substituindo na igualdade anterior, vem:

$$\frac{3\pi}{2} = \arg(z) + \frac{8\pi}{9} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{8\pi}{9} = \arg(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27\pi}{18} - \frac{16\pi}{18} = \arg(z) \Leftrightarrow \frac{11\pi}{18} = \arg(z)$$



Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

Assim, como $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n - 2) + 2$ temos que $i^{4n-6} = i^2 = -1$

Devemos escrever $2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:

$$2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \text{sen} \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6}\right) - i \text{sen} \left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5}\right)} &= \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-i}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5}\right)} = \\ &= \frac{\text{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2} \text{cis} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \text{cis} \left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{1}{2} \text{cis} \left(\frac{13\pi}{10}\right) \end{aligned}$$



1.2. Como $z_1 = \text{cis } \alpha = \cos \alpha + i \text{sen } \alpha$ e

$$z_2 = \text{cis} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + i \text{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen } \alpha + i \cos \alpha, \text{ vem que:}$$

$$z_1 + z_2 = (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha) + (-\text{sen } \alpha + i \cos \alpha) = (\cos \alpha - \text{sen } \alpha) + i(\text{sen } \alpha + \cos \alpha)$$

Assim,

- $\text{Re}(z_1 + z_2) = \cos \alpha - \text{sen } \alpha$ e como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, logo
 $\cos \alpha < \text{sen } \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha - \text{sen } \alpha < 0$, logo temos que $\text{Re}(z_1 + z_2) < 0$
- $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$ e como α é um ângulo do 1º quadrante,
 $\text{sen } \alpha > 0 \wedge \cos \alpha > 0 \Rightarrow \text{sen } \alpha + \cos \alpha > 0$, logo temos que $\text{Im}(z_1 + z_2) > 0$

Ou seja, a representação geométrica de $z_1 + z_2$ no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

2.

2.1. Como a experiência «Analisar um pacote de açúcar» se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: «Número de pacotes em condições de serem comercializados», segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Considerando como sucesso o acontecimento «Pacote estar em condições de ser comercializado», a respetiva probabilidade, é:

$$p = P(5,7 < Y < 7,3) = P(6,5 - 2 \times 0,4 < Y < 6,5 + 2 \times 0,4) = P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$\text{Logo, } q = 1 - p = 1 - P(5,7 < Y < 7,3) \approx 1 - 0,9545 = 0,0455$$

Assim temos $n = 10$, vem $p \approx 0,9545$ e $q \approx 0,0455$, pelo que:

$$P(X = 8) = {}^{10} C_8 \times (0,9545)^8 \times (0,0455)^2 \approx 0,064$$

2.2. A resposta (I) (${}^{500} C_{30} - {}^{498} C_{28}$) pode ser interpretada como:

O número total de grupos de 30 funcionários que se podem escolher são ${}^{500} C_{30}$. Naturalmente em alguns destes estão presentes as duas irmãs.

Se ao número total destes grupos subtrairmos o número de grupos em que as duas irmãs estão presentes, ou seja, os grupos de 30 elementos que incluem as duas irmãs e mais 28 de entre os restantes 498 funcionários (${}^{498} C_{28}$), restam apenas os grupos onde está apenas uma das irmãs ou então nenhuma delas, o que significa que pelo menos uma delas não integrará o grupo de funcionários escolhidos.

A resposta (II) ($2 \times {}^{498} C_{29} + {}^{498} C_{30}$) pode ser interpretada como:

Os grupos de 30 funcionários, que respeitam a condição definida, podem ser de dois tipos:

- Apenas uma das irmãs pertence ao grupo.
Existem $2 \times {}^{498} C_{29}$ grupos deste tipo, pois resultam de incluir 1 das 2 irmãs e mais 29 funcionários, escolhidos de entre os restantes 498.
- Nenhuma das irmãs pertence ao grupo. Existem ${}^{498} C_{30}$ grupos deste tipo, pois resultam da escolha de 30 funcionários do grupo de 498 funcionários que não inclui as irmãs.

Assim, $2 \times {}^{498} C_{29} + {}^{498} C_{30}$ representa o número de grupos que inclui apenas uma das irmãs, adicionado ao número de grupos que não inclui nenhuma das irmãs.



3. Temos que,

$$\begin{aligned}
 P(\overline{A \cap B} | B) + P(A | B) &= \frac{P((\overline{A \cap B}) \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
 &= \frac{P((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
 &= \frac{P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)) + P(A \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} && \overline{B} \cap B = \emptyset \text{ e } X \cup \emptyset = X \\
 &= \frac{P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} && \text{Teorema: } P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) \\
 &= \frac{P(B)}{P(B)} \\
 &= 1 && \text{Hipótese: } P(B) \neq 0
 \end{aligned}$$

Logo, se $P(B) \neq 0$ então $P(\overline{A \cap B} | B) + P(A | B) = 1$ *q.e.d.*

4.

4.1. Temos que $f(0) = 1 - e^{k+1}$

Calculando $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, vem

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \frac{1 - e^{4(0^+)}}{0^+} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(-1 + e^{4x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{4} \times \frac{-(e^{4x} - 1)}{x} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-4 \times \frac{(e^{4x} - 1)}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-4) \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{4x} - 1)}{4x}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4
 \end{aligned}$$

Como se pretende que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, vem

$$-4 = 1 - e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1} = 1 + 4 \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k + 1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = -1 + \ln 5$$



4.2. Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando $x \rightarrow 0^-$ ou quando $x \rightarrow 0^+$.

Calculando os limites temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^{4x} - 1)}{\frac{1}{4} \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4(e^{4x} - 1)}{4x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = -4$$

(fazendo $y = 4x$, se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= -4 \lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{(1 - \sqrt{1 - x^3})(1 + \sqrt{1 - x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1^2 - (\sqrt{1 - x^3})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - (1 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - 1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\text{sen } x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{x^3} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{x^2} = 1 \times \frac{1 + \sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f (quando $x \rightarrow 0^-$).



4.3. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} \text{Como } x \in \mathbb{R}^+, \quad g'(x) &= f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x} - 1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x} \\ g''(x) &= (g'(x))' = \left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\left(\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\frac{(e^{4x})' \times x - e^{4x} \times (x)'}{x^2} = -\frac{(4x)'e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = \\ &= -\frac{4e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = -\frac{e^{4x}(4x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{e^{4x}(4x - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -e^{4x}(4x - 1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x > 0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-e^{4x} = 0}_{\text{Eq Imp}} \vee 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-
$g(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de g :

- tem um único ponto de inflexão (de abscissa $x = \frac{1}{4}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \frac{1}{4}[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{4}, +\infty[$

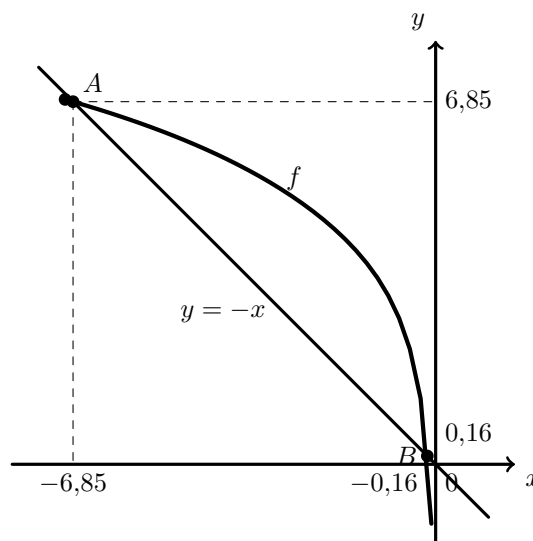


5. A bissetriz dos quadrantes pares, é a reta de equação $y = -x$, logo as coordenadas dos pontos A e B podem ser determinadas através da interseção do gráfico da função f com a reta $y = -x$.

Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos da função f e da reta, numa janela compatível como o domínio da função f , ($-7 \leq x < 0$) - reproduzidos na figura ao lado - e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos valores, aproximado às centésimas, para as coordenadas dos pontos $A(-6,85; 6,85)$ e $B(-0,16; 0,16)$

Calculando a distância entre dois pontos pela fórmula $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ vem que:

$$\begin{aligned} d &\approx \sqrt{(-0,16 - (-6,85))^2 + (0,16 - 6,85)^2} \approx \\ &\approx \sqrt{6,69^2 + (-6,69)^2} \approx \sqrt{44,756 + 44,756} \approx \\ &\approx \sqrt{89,512} \approx 9,46 \end{aligned}$$



6.

- 6.1. Definindo o ponto P , como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

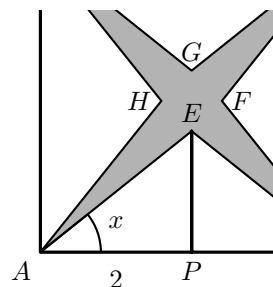
Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar \overline{EP} , recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$\begin{aligned} A_{[AEBFCGDH]} &= A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} = \\ &= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a área da região sombreada é dada por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$



- 6.2. Como a função a resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $4,38 < 5 < 11,71$, ou seja, $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(\alpha) = 5$, ou seja, que existe um ângulo α com amplitude compreendida entre $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ e $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$, que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11,71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4,38$$

