

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

2013 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. A escolha pode ser feita selecionando, 9 dos 16 quadrados para colocar os discos brancos (não considerando a ordem relevante porque os discos são iguais). Ou seja, ${}^{16}C_9$ são as diferentes formas de dispor os discos brancos no tabuleiro.

Depois, selecionamos 3 quadrados, de entre os 7 que permanecem sem qualquer disco. Ou seja 7C_3 são as diferentes formas de dispor os discos pretos no tabuleiro, depois de termos colocado os 9 discos brancos.

Assim, o número de formas diferentes de colocar os 12 discos no tabuleiro, de acordo com as condições definidas é

$${}^{16}C_9 \times {}^7C_3$$

Resposta: **Opção B**

2. O segundo e o penúltimo números de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais. Assim, se o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de um linha é 484, podemos calcular o valor de ambos:

$$a \times a = 484 \Leftrightarrow a^2 = 484 \Leftrightarrow a = \sqrt{484} \Leftrightarrow a = 22$$

Assim, temos que a linha em causa tem 23 elementos da forma ${}^{22}C_n$.

Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 1000:

$${}^{22}C_0 = {}^{22}C_{22} (= 1); {}^{22}C_1 = {}^{22}C_{21} (= 22) \text{ e ainda } {}^{22}C_2 = {}^{22}C_{20} (= 231)$$

Porque

$${}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540 \text{ e todos os restantes são superiores a estes.}$$

Logo, sabemos que existem $23 - 6 = 17$ elementos superiores a 1000 num total de 23, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{17}{23}$

Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\begin{aligned} \log_a (a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b} &= \log_a (a^5) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a (b^{\frac{1}{3}}) + b = \\ &= 5 + \frac{1}{3} \log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**



4. Como, a função f é contínua em $[-e, 1]$, e como $1 < \frac{e}{2} < e$, ou seja, $f(-e) < \frac{e}{2} < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e, 1[$ tal que $f(c) = \frac{e}{2}$, ou seja, que a equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, 1[$

Resposta: **Opção D**

5. Sabemos que a é um zero da primeira derivada (porque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$) e que tem uma mudança de sinal associada, (porque $f''(x) < 0$, ou seja, f' é decrescente):

x		a	
$(f'(x))'$		-	
$f'(x)$		\rightarrow	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\rightarrow	Máx	\rightarrow

Logo podemos concluir que a é um maximizante, e por isso $f(a)$ é um máximo relativo da função f .

Resposta: **Opção B**

Não existem dados suficientes para rejeitar ou validar a afirmação da opção (A).

A afirmação (C) é falsa, porque se a fosse um minimizante, então $f''(a) > 0$.

A afirmação (D) é falsa, porque se P fosse um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$

6. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$g(x)$	\rightarrow	Máx	\rightarrow	min	\rightarrow
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.

Como $f(x) = g(x - 3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g , de 3 unidades para a direita.

Assim, temos que os extremos da função f têm abscissas $a + 3$ e $b + 3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$	$a + 3$		$b + 3$	$+\infty$
$f(x)$	\rightarrow	Máx	\rightarrow	min	\rightarrow
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a + 3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b + 3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

Resposta: **Opção A**



7. Se $z = 2 + bi$, então $\bar{z} = 2 - bi$

Assim temos $\text{Re}(\bar{z}) > 0$ e como $b < 0$, $\text{Im}(\bar{z}) > 0$, pelo que sabemos que a representação geométrica de \bar{z} pertence ao primeiro quadrante, logo $\text{Arg}(\bar{z})$ não pode ser $-\alpha$

Por outro lado $|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$, como $b^2 > 0$, temos que $|\bar{z}| > 2$, logo $|\bar{z}|$ não pode ser $\frac{3}{2}$

Resposta: **Opção C**

8. Podemos reescrever a condição dada na forma:

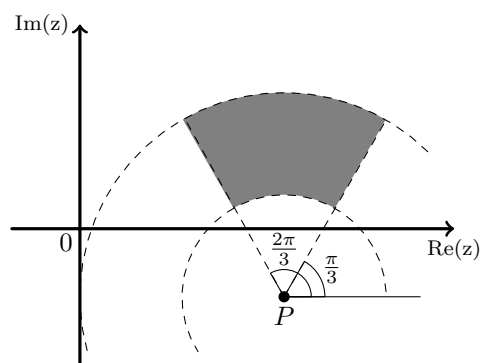
$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq |z - (3 - i)| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - (3 - i)) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Assim, sendo o ponto P a representação geométrica do número complexo $3 - i$, a condição define o conjunto de pontos do plano complexo que:

- estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3
- definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3}$ rad e $\frac{2\pi}{3}$ rad

Resposta: **Opção A**



GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{22} = i^{4 \times 5 + 2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1 - 2 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

$$\bullet \rho = |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}; \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2^\circ \text{ quadrante, logo}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Assim $z_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

E como $-2 = 2 \operatorname{cis} \pi$ e $i = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{2 \operatorname{cis} \pi}{\operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}} = 2 \operatorname{cis} \left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Assim temos que $(z_2)^n = \left(2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^n = 2^n \operatorname{cis} \left(n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

E para que $(z_2)^n$ seja um número real negativo, $\arg(z_2)^n = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; ou seja:

$$n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi + 2k\pi}{-\frac{\pi}{6}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi + 12k\pi}{-\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -6 - 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Como, $n = -6 - 12k \Leftrightarrow \frac{n+6}{-12} = k \Leftrightarrow \frac{-n-6}{12} = k$

logo, para que $k \in \mathbb{Z}$, o menor valor natural que n pode tomar é 6, ficando $\frac{-6-6}{12} = k \Leftrightarrow k = -1$

1.2. Fazendo a simplificação temos:

$$\frac{\cos(\pi - \alpha) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}$$

$$= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{cis}(\pi - \alpha)}{\operatorname{cis} \alpha}$$

$$= \operatorname{cis}(\pi - \alpha - \alpha)$$

$$= \operatorname{cis}(\pi - 2\alpha)$$

Porque $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$

Porque $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$

Fazendo a divisão na forma trigonométrica

Como queríamos mostrar



2. Pelas leis de De Morgan, e pelo teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap B) &= \frac{5}{9} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{9} = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{4}{9} = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{9} = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Como $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B|A)}$; $P(B \cap A) = \frac{2}{9}$ e $P(B|A) = \frac{2}{7}$, temos que

$$P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B|A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{9}$$

Logo, temos que $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$

E que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Se repararmos que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, ou seja que \overline{A} e \overline{B} são acontecimentos incompatíveis (porque não existem números pares iguais ou maiores que 3), temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) - P(\overline{A}) = P(\overline{B})$$

E assim a probabilidade de sair o número 3, ou seja ocorrer o acontecimento \overline{B} , é,

$$P(\overline{B}) = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

3.

3.1. Como $P(X = 1) = \frac{3}{5}$, sabemos que $\frac{3}{5}$ dos jornalistas são do sexo feminino, ou seja, $\frac{3}{5} \times 20 = 12$ jornalistas do sexo feminino num total de 20, e por isso, 8 jornalistas do sexo masculino.

Escolhendo, ao acaso, 2 jornalistas, de entre os 20, podemos seleccionar grupos, com 0, 1 ou 2 jornalistas do sexo feminino, e as probabilidades são:

- $P(Y = 0) = \frac{{}^{12}C_0 \times {}^8C_2}{{}^{20}C_2} = \frac{1 \times 28}{190} = \frac{14}{95}$
- $P(Y = 1) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^8C_1}{{}^{20}C_2} = \frac{12 \times 8}{190} = \frac{96}{190} = \frac{48}{95}$
- $P(Y = 2) = \frac{{}^{12}C_2 \times {}^8C_0}{{}^{20}C_2} = \frac{66 \times 1}{190} = \frac{33}{95}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$



3.2. A Resposta (I) (${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^8A_4$) pode ser interpretada como:

Selecionando, de entre os 20 jornalistas 16 para ocupar as duas filas da frente, temos ${}^{20}C_{16}$ grupos diferentes de 16 jornalistas.

Como em cada um destes grupos, existem $16!$ maneiras diferentes de os sentar, correspondentes a todas as trocas de lugar entre eles que podem ser feitas, multiplicamos os dois números.

E, por cada uma das situações diferentes antes consideradas, existem ainda 8A_4 hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

A Resposta (II) (${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^8A_4$) pode ser interpretada como:

Existem ${}^{20}A_8$ formas de ocupar a primeira fila, selecionam-se 8 de entre os 20 jornalistas (considera-se a ordem relevante para considerar as trocas possíveis entre cada grupo de 8 selecionados).

Por cada uma das hipóteses anteriores, existem ${}^{12}A_8$ formas de ocupar a segunda fila, correspondentes a selecionar 8 de entre os 12 jornalistas que não ocuparam a primeira fila, podendo estes 8 fazer todas as trocas entre si.

Finalmente, por cada uma das ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8$ formas de ocupar as duas primeira filas, existem ainda 8A_4 hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{3+x} + 2x) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1^+} + \text{sen}(1^+ - 1)}{1 - 1^+} = \frac{0^- + \text{sen}(0^+)}{0^-} = \frac{0}{0}$
(ind.)

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \right) =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1-x}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen } y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{1^+}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; logo a função f não é contínua em $x = 1$



4.2. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^{3+x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3+x} + 2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3+x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = e^{3+(-\infty)} + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = -\infty \times e^{3+(-\infty)} =$$

$$= -\infty \times e^{-\infty} + 2 = -\infty \times 0^+ \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{3+x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} (ye^{3-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(y \times \frac{e^3}{e^y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(e^3 \times \frac{y}{e^y} \right) =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow +\infty} e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^3 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = -e^3 \times \frac{1}{+\infty} = -e^3 \times 0 = 0$$

$\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}$
Lim. Notável

Assim temos que a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$





5. Começando por determinar g'' temos:

$$g''(x) = (g'(x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{(e^x)' + (6e^{-x})' + (4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x + 6(-x)'e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de g'' :

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \wedge e^x + 6e^{-x} + 4x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\text{(como } e^x + 6e^{-x} + 4x > 0 \text{ em } \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - 6\frac{1}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{6}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6 + 4e^x = 0 \Leftrightarrow \\ &\text{(fazendo a substituição de variável } y = e^x) \\ &\Leftrightarrow y^2 - 6 + 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \vee y = -2 - \sqrt{10} \quad (-2 - \sqrt{10} \notin \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \ln(-2 + \sqrt{10}) \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	0		$\ln(-2 + \sqrt{10})$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de g :

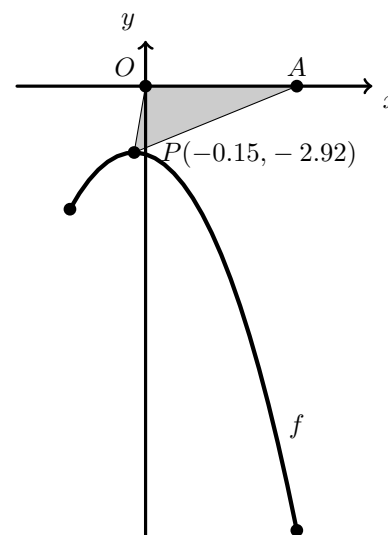
- tem um único ponto de inflexão (de abscissa $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10}[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $] \ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$

6. Representado o gráfico de f , no domínio definido (reproduzido na figura ao lado, numa janela compatível com o domínio da função $(-1 \leq x \leq 2)$), podemos observar que o triângulo $[OAP]$ terá área mínima quando a ordenada do ponto P corresponder ao máximo da função.

Usando a função da calculadora gráfica para determinar o máximo de uma função num intervalo, determinámos valores aproximados às centésimas para as coordenadas de $P(-0.15, -2.92)$.

Designado a ordenada do ponto P por y_P , temos que o valor da área do triângulo $[OAP]$ (arredondado às centésimas) é:

$$A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |y_P|}{2} = \frac{2 \times |-2.92|}{2} = 2.92$$



7.

7.1. Começamos por definir o ponto $P(-3,0)$ e o ângulo AOP , cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

Assim, como sabemos que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular \overline{OA} :

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)}$$

Como $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, temos que:

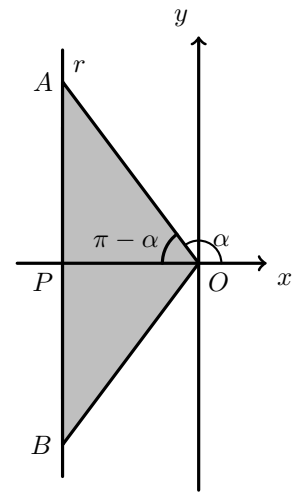
$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Depois, calculamos \overline{AP} recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3 \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3 \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3 \operatorname{tg} \alpha$$



Como $\overline{AB} = 2 \times \overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2 \times \overline{AP} + 2 \times \overline{OA} = 2 \times (-3 \operatorname{tg} \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha}\right) = -6 \operatorname{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

Logo, para cada $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, o perímetro do triângulo é $P(x) = -6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}$

7.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pela valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função P :

$$\begin{aligned} P'(x) &= \left(-6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}\right)' = (-6 \operatorname{tg} x)' - \left(\frac{6}{\cos x}\right)' = -6 (\operatorname{tg} x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= -6 \left(\frac{1}{(\cos x)^2}\right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é

$$m = P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{-6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-6 - 3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

