

# Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

## 2014 - Época especial

Proposta de resolução

---

### GRUPO I

---

1. Para que os números de cinco algarismos sejam ímpares e tenham 4 algarismos pares, todos os números devem ser pares à exceção do último. Assim, existem 4 hipóteses para selecionar o primeiro algarismo, das dezenas de milhar (nomeadamente 2, 4, 6, e 8, ficando garantido que o número é superior a 20 000), 5 hipóteses para a escolha do segundo algarismo (os anteriores e o zero), tal como para os terceiro e quarto algarismos; e também 5 hipóteses para o quinto algarismo, o das unidades (nomeadamente 1, 3, 5, 7 e 9, ficando garantido que o número é ímpar).

Assim a quantidade de números ímpares com cinco algarismos que têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 é

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$$

Resposta: **Opção D**

2. A linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20, como o primeiro e o último números são 1, a soma do segundo com o penúltimo é 18, sendo estes iguais entre si, e por isso iguais a  $\frac{18}{2} = 9$ .

Na linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 9, os elementos são da forma  ${}^9C_k$ , pelo que, recorrendo à calculadora, podemos verificar a composição da linha:

$$1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1$$

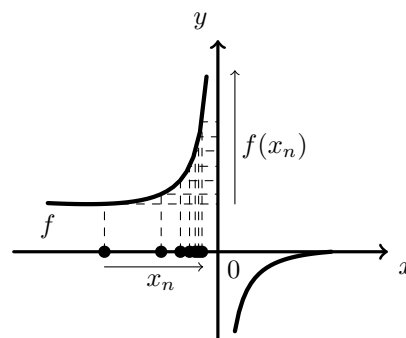
Assim, escolhendo, ao acaso, um elemento desta linha, a probabilidade de ele ser par é  $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Resposta: **Opção C**

3. Como  $\lim x_n = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0^-$ , então

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0-1}{e^{0^-} - 1} = \frac{-1}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de  $(x_n)$  como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens  $f(x_n)$ , que tendem para  $+\infty$ , quando o valor de  $n$  aumenta.



Resposta: **Opção D**



4. O triângulo  $[OBC]$  é retângulo em  $B$ ,  $\overline{OB} = 1$ , e  $[BC]$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ , temos que:

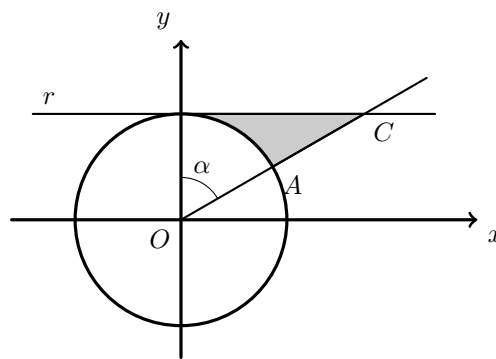
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \overline{BC}$$

Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro  $O$ , raio 1 e amplitude  $\alpha$  (delimitado pelo arco  $AB$ ) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



Como a área da zona sombreada ( $A_S$ ) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo  $[OBC]$  e o setor circular de centro  $O$  e delimitado pelo arco  $AB$ , temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

5. Para que o gráfico de uma função tenha exatamente dois pontos de inflexão, a segunda derivada deve ter exatamente dois zeros, associados a uma mudança de sinal.

Nas opções (B) e (C) existem 4 e 3 zeros associados a uma mudança de sinal, respectivamente, ou seja, se cada um destes for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá, respectivamente quatro e três pontos de inflexão.

Na opção (D) existem 2 zeros, mas só um deles está associado a uma mudança de sinal, ou seja, se este for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá um único ponto de inflexão.

Na opção (A) existem 2 zeros, ambos associados a uma mudança de sinal, pelo que podemos concluir que este é o gráfico da segunda derivada, em que o gráfico da função associada terá exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta: **Opção A**

6. Como a reta de equação  $y = 2x - 5$  é assíntota do gráfico de  $f$  e  $D_f = \mathbb{R}^+$ , sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6x - 1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**



7. Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , o vetor diretor da reta e o vetor normal do plano são colineares. Assim, qualquer vetor diretor da reta  $r$  tem que ser colinear com o vetor  $\vec{u} = (1, -1, -2)$ . Analisando as condições que definem cada uma das retas, nomeadamente os vetores diretores, temos:

- A reta definida pela condição da opção (A), que pode ser escrita como  $\frac{x-2}{1} = \frac{z+1}{1} \wedge y=0$ , com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é  $\vec{u}_A = (1,0,1)$  e que não é colinear com o vetor normal do plano  $\alpha$
- A reta definida pela condição da opção (B), que pode ser escrita como  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+3}{2}$ , com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é  $\vec{u}_B = (-1,1,2)$  e que é colinear com o vetor normal do plano  $\alpha$ , porque  $\vec{u}_B = -\vec{u}$
- A reta definida pela condição da opção (C), que evidencia as coordenadas do vetor diretor, que é  $\vec{u}_C = (2,3,0)$  e não é colinear com o vetor normal do plano  $\alpha$
- A reta definida pela condição da opção (D), que pode ser escrita como  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+0}{-1} = \frac{z-3}{1}$ , com o objetivo de evidenciar as coordenadas do vetor diretor, que é  $\vec{u}_D = (1, -1, 1)$  e que não é colinear com o vetor normal do plano  $\alpha$

Assim, a reta definida pela condição (B) é a única perpendicular ao plano  $\alpha$  e contém o ponto  $A(2,0,3)$ , e se substituirmos as coordenadas do ponto na condição obtemos uma proposição verdadeira:

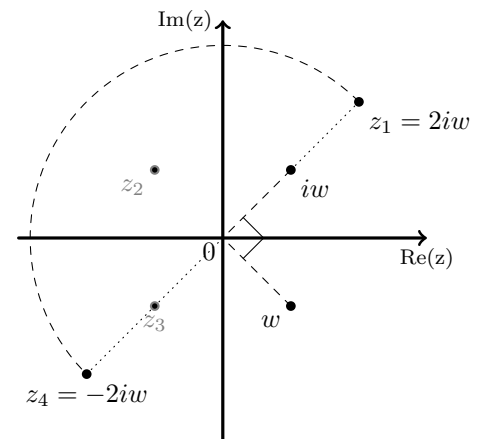
$$-2 + 5 = 0 + 3 = \frac{3+3}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 = 3$$

Resposta: **Opção B**

8. A operação "multiplicar por  $i$ " corresponde a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos", pelo que a imagem geométrica de  $iw$  está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de  $w$

A operação "multiplicar por 2" corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que  $2iw = z_1$

Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em  $O$  e amplitude  $\pi$  radianos, pelo que  $-2iw = z_4$



Resposta: **Opção D**



---

## GRUPO II

---

1.

1.1. Simplificando a expressão de  $z_1$  vem:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1-i}{2i} - i^{-1} = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i}{2i} - \frac{2}{2i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{-1-i}{2i} = \frac{(-1-i)i}{(2i)i} = \\ &= \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{-i-(-1)}{2(-1)} = \frac{-i+1}{-2} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Escrevendo  $z_1$  na f.t., temos que  $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde:

- $\rho = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 2º quadrante,  
logo  $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

E assim, pela fórmula de Moivre para a potenciação

$$(z_1)^4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} \right)^4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \operatorname{cis} \left( 4 \times \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} \operatorname{cis} (3\pi) = \frac{4}{16} \operatorname{cis} (3\pi) = \frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi$$

Como  $\overline{z_2} = \overline{\operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cis} \left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ , fazendo o produto na f.t., vem:

$$(z_1)^4 \times \overline{z_2} = \left( \frac{1}{4} \operatorname{cis} \pi \right) \times \left( \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{1}{4} \times 1 \right) \operatorname{cis} \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

Como  $\arg((z_1)^4 \times \overline{z_2})$  é da forma  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , a imagem geométrica de  $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.2. Como  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ ,  $\operatorname{sen} \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  e  $\cos \alpha = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  vem que

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i \cos^2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2i \cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha) = \\ &= 2 \cos \alpha \left( \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) = 2 \cos \alpha \left( \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \end{aligned}$$

Como  $\cos \alpha > 0$ , porque  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , a f.t. do número complexo  $w$  é  $w = 2 \cos \alpha \left( \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right)$ , em que  $|w| = 2 \cos \alpha$



2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno nesta turma, e os acontecimentos:

$R$ : «O aluno ser rapariga»

$D$ : «O aluno está inscrito no desporto escolar»

Temos que  $P(\bar{R}) = 0,6$ ;  $P(D) = 0,8$  e  $P(\bar{D}|\bar{R}) = 0,2$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,8 = 0,2$
- $P(\bar{D} \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P(\bar{D}|\bar{R}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$
- $P(R \cap \bar{D}) = P(\bar{D}) - P(\bar{D} \cap \bar{R}) = 0,2 - 0,12 = 0,08$
- $P(R \cap D) = P(R) - P(R \cap \bar{D}) = 0,4 - 0,08 = 0,32$

	$R$	$\bar{R}$	
$D$	0,32		0,8
$\bar{D}$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar e, escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(R|D) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0,32}{0,8} = \frac{2}{5}$$

2.2. Recorrendo à Regra de LaPlace para determinar a probabilidade, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 3 alunos escolhidos de entre os 25, como a ordem é irrelevante, corresponde a  ${}^{25}C_3$

Como a turma tem 25 alunos, e 80% estão inscritos no desporto escolar, o número de inscritos é de  $25 \times 0,8 = 20$

Para determinar o número de casos favoráveis, ou seja, o número de grupos em que, pelo menos, 2 alunos (dos 3) estão inscritos no desporto escolar, calculamos a soma do número de grupos relativos a duas situações distintas

- todos (os 3) estão inscritos no desporto escolar, o que corresponde a selecionar 3 de entre os 20 inscritos (sem considerar relevante a ordenação), ou seja  ${}^{20}C_3$
- exatamente 2 (dos 3) estão inscritos no desporto escolar e o outro aluno não, que corresponde a selecionar 2 alunos do conjunto dos 20 inscritos e 1 dos 5 não inscritos, ou seja  ${}^{20}C_2 \times 5$

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar, e arredondando o resultado às centésimas, temos

$$\frac{{}^{20}C_3 + {}^{20}C_2 \times 5}{{}^{25}C_3} \approx 0,91$$



3. Como  $A$  e  $\bar{A}$  são acontecimentos equiprováveis, temos que  $P(A) = P(\bar{A})$   
 Como  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  vem que

$$P(A) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(A) = 1 \Leftrightarrow 2P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Assim,

$  \begin{aligned}  2P(A \cup B) &= 2(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\  &= 2P(A) + 2P(B) - 2P(A \cap B) \\  &= 2P(A) + 2P(B) - 2 \times P(A) \times P(B) \\  &= 2 \times \frac{1}{2} + 2P(B) - 2 \times \frac{1}{2} \times P(B) \\  &= 1 + 2P(B) - 1 \times P(B) \\  &= 1 + P(B)  \end{aligned}  $	<p>Teorema: <math>P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)</math></p> <p>Hipótese: <math>P(A \cap B) = P(A) \times P(B)</math></p> <p>Hipótese: <math>P(A) = \frac{1}{2}</math></p>
---	--

Logo, se  $P(A) = P(\bar{A})$  e  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , então  $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$  *q.e.d.*



4. Recorrendo às equações da reta  $AD$  podemos determinar as coordenadas dos pontos  $A$  e  $D$ , substituindo, para cada um dos pontos, as coordenadas nulas:

Assim, calculando as coordenadas do ponto  $D$ , como  $x = 0$ , vem:

$$\frac{0-3}{3} = -\frac{z}{5} \Leftrightarrow -1 = -\frac{z}{5} \Leftrightarrow 5 = z$$

Ou seja, temos que  $D(0,0,5)$

Procedendo da mesma forma com o ponto  $A$ , como  $z = 0$ , vem:

$$\frac{x-3}{3} = -\frac{0}{5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Ou seja, temos que  $A(3,0,0)$

Assim, podemos como o ponto  $B$  e o ponto  $A$  têm a mesma abcissa, vem que  $B(3, -3, 0)$

Para calcular a ordenada do ponto  $C$  vamos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{OC}\|^2 + \|\overrightarrow{OD}\|^2 \Leftrightarrow 41 = \|\overrightarrow{OC}\|^2 + 5^2 \Leftrightarrow 41 - 25 = \|\overrightarrow{OC}\|^2 \Leftrightarrow 16 = \|\overrightarrow{OC}\|^2 \underset{\|\overrightarrow{OC}\| > 0}{\Leftrightarrow} 4 = \|\overrightarrow{OC}\|$$

Logo temos que  $C(0, -4, 0)$

Como conhecemos as coordenadas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ , vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano  $BCD$ :

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (0, 0, 5) - (0, -4, 0) = (0, 4, 5)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (3, -3, 0) - (0, -4, 0) = (3, 1, 0)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ( $\vec{u} = (a, b, c)$ ), que é um vetor normal do plano  $BCD$ :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 4, 5) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 5c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{4b}{5} \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano que contém a face  $[BCD]$  é da forma

$$\vec{u} = \left( -\frac{b}{3}, b, -\frac{4b}{5} \right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ou seja, concretizando um valor para  $b$ , por exemplo,  $b = 1$ , vem  $\vec{u} = \left( -\frac{1}{3}, 1, -\frac{4}{5} \right)$



5.

5.1. Para que a função seja contínua em  $x = 2$ , temos que garantir que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Temos que

$$\begin{aligned}
 & \bullet f(2) = 2e^{2-2} = 2e^0 = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (xe^{x-2}) = 2e^{2^- - 2} = 2e^{0^-} = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \\
 & \quad = \frac{\text{sen}(2-2^-)}{(2^-)^2 + 2^- - 6} + k = \frac{0}{0} + k \text{ (indeterminação)} \quad \begin{array}{l} \text{(fazendo } y = x - 2, \text{ temos } x = y + 2 \text{ e } -y = 2 - x; \\ \text{e se } x \rightarrow 2^+, \text{ então } y \rightarrow 0^+) \end{array} \\
 & \quad = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen}(-y)}{(y+2)^2 + y + 2 - 6} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen}(-y)}{y^2 + 4y + 4 + y - 4} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen}(-y)}{y^2 + 5y} \right) + k = \\
 & \quad = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\text{sen } y}{y(y+5)} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen } y}{y} \times \frac{-1}{y+5} \right) + k = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-1}{y+5} + k = \\
 & \quad = 1 \times \frac{-1}{0^+ + 5} + k = -\frac{1}{5} + k
 \end{aligned}$$

Como se pretende que a função seja contínua em  $x = 2$ , e verificámos que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ , podemos determinar o valor de  $k$  garantindo que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{5} + k \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{11}{5} = k$$

5.2. Como  $D_f = ] - \infty, e[$ , se existir uma assíntota horizontal,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  é constante.

Assim, calculando o limite temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-2}) = -\infty \times xe^{-\infty-2} = -\infty \times 0 \text{ (indeterminação)}$$

(Seja  $y = -x$ , temos que se  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y \times e^{-y} \times e^{-2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -y \times \frac{1}{e^y} \times e^{-2} \right) = \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{y}{e^y} \right) \times \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-2} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \times e^{-2} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^{-2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^y}{y}} \right) = \\
 &= -e^{-2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^{-2} \times \frac{1}{+\infty} = -e^{-2} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  e  $D_f = ] - \infty, e[$ , podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$  é a reta de equação  $y = 0$





6.

6.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left( \frac{1 + \ln x}{x^2} \right)' = \frac{(1 + \ln x)'(x^2) - (1 + \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(0 + \frac{x'}{x}\right)(x^2) - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \\
 &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x - 2x \ln x}{x^4} \underset{x \neq 0}{=} \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} = \\
 &= \frac{-x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x(x^3)} \underset{x \neq 0}{=} \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ( $\mathbb{R}^+$ ), vem:

$$\frac{-1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 \ln x = 0 \wedge \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{PV}, x > 0} \Leftrightarrow -2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	+	0	-
$g(x)$	n.d.	$\rightarrow$	Máx	$\rightarrow$

Assim, como  $g$  é crescente no intervalo  $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$  e decrescente no intervalo  $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$  podemos concluir que o único valor de  $x$ , para o qual a função  $g$  tem um extremo relativo, é  $x = e^{-\frac{1}{2}}$  que é um maximizante da função.

6.2. Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $g$ , numa janela coerente com o domínio da função, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abscissa do ponto  $A$ ,  $x_A \approx 0,37$ , que é também o comprimento do segmento  $[OA]$  que podemos tomar como a base do triângulo  $[OAB]$

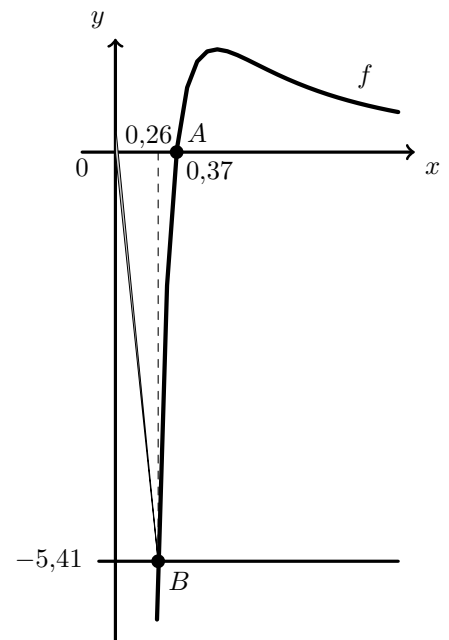
Como sabemos que o ponto  $B$  está sobre uma reta que passa na origem e tem declive negativo, é um ponto do 4º quadrante, com abscissa menor que a abscissa do ponto  $A$ , e cuja distância ao eixo das abcissas, ou seja, a abscissa do ponto  $B$  é um valor de  $x$  tal que  $|g(x)|$  é a medida da altura relativa à base  $[OA]$ , do triângulo  $[OAB]$

Desta forma, como a área do triângulo é 1, procuramos um valor de  $x$  tal que

$$\frac{|g(x)| \times x_A}{2} = 1 \Rightarrow |g(x)| \approx \frac{2}{0,37} \Leftrightarrow |g(x)| \approx 5,41$$

Assim, como o ponto  $B$  tem ordenada negativa, traçamos também a reta  $y = -5,41$ , também reproduzida na figura anterior, e recorreremos à função da calculadora para determinar valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de duas funções para determinar a abscissa do ponto  $B$ , ou seja  $x_B \approx 0,26$

Assim, para que a área do triângulo  $[OAB]$  seja 1, as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ , com arredondamento às centésimas, são, respetivamente  $x_A \approx 0,37$  e  $x_B \approx 0,26$



7. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação  $x = 0$  é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$ , a função não é contínua para  $x = 0$ , logo não é contínua no intervalo  $[-3,5]$ , pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

A afirmação (II) é falsa. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$  podemos afirmar que a reta de equação  $y = 2x + 0$  é uma assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ . Assim, quando  $x \rightarrow -\infty$  o gráfico de  $f$  tem uma assíntota que não é horizontal.

A afirmação (III) é verdadeira. O  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  é a derivada de  $f$ . Como a derivada existe e é positiva em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , podemos afirmar que  $f$  é crescente em  $]-\infty, 0[$  e também em  $]0, +\infty[$ , o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.

