

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano  
2014 - 1ª Fase

Proposta de resolução

---

**GRUPO I**

---

1. Sabemos que  $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$

Como  $P(A) = 0,4$ , temos que  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

Como  $P(B|\bar{A}) = 0,8$  e  $P(\bar{A}) = 0,6$ , temos que  $P(B \cap \bar{A}) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$

Como  $P(B \cap \bar{A}) = P(B \setminus A) = P(B - A)$ , temos que

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$$

Como  $P(B \cap \bar{A}) = 0,48$  e  $P(A \cap B) = 0,2$ , vem que

$$P(B) = 0,48 + 0,2 = 0,68$$

Resposta: **Opção C**

2. Se o número tem 10 posições (algarismos), das quais 6 serão ocupadas por algarismo 2, o número de conjuntos diferentes de 6 posições para os algarismos 2 é  ${}^{10}C_6$  (por não interessar a ordem, uma vez que as posições serão ocupadas por elementos iguais).

Por cada um destes conjuntos, podemos colocar nas restantes 4 posições (algarismos) 8 elementos (os algarismos de 3 a 9 e mais o algarismo 1), eventualmente repetidos.

Assim, considerando a ordem como relevante (por poderem ser algarismos diferentes), temos  ${}^8A_4 = 8^4$  grupos diferentes.

Logo o total de números diferentes que existem, nas condições definidas, é  ${}^{10}C_6 \times 8^4$

Resposta: **Opção A**

3. Como  $\lim x_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$ , então

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

E assim

$$\lim \frac{2}{f(x_n)} = \frac{\lim 2}{\lim f(x_n)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**



4. Como a função  $f$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $[0, 1]$ .

Como o teorema de Bolzano garante que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]0,1[$ , então, pelo hipótese do teorema de Bolzano, sabemos que zero está compreendido entre  $f(0)$  e  $f(1)$ , e pelo corolário do teorema de Bolzano temos que  $f(0) \times f(1) < 0$

Assim, temos que  $f(0) = ke^0 + 0 = k \times 1 = k$  e  $f(1) = ke^1 + 1 = ke + 1$

Calculando os zeros de  $f(0) \times f(1)$ , temos

$$f(0) \times f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times (ke + 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee ke + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{e}$$

E, estudando o sinal de  $f(0) \times f(1)$  vem que:

|                    |           |                |   |     |           |
|--------------------|-----------|----------------|---|-----|-----------|
| $k$                | $-\infty$ | $-\frac{1}{e}$ |   | $0$ | $+\infty$ |
| $k$                | -         | -              | - | $0$ | +         |
| $ke + 1$           | -         | $0$            | + | +   | +         |
| $f(0) \times f(1)$ | +         | $0$            | - | $0$ | +         |

Pelo que verificamos que  $f(0) \times f(1) < 0$  se  $k \in \left] -\frac{1}{e}, 0 \right[$

Resposta: **Opção B**

5. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left( a + \ln \left( \frac{a}{x} \right) \right)' = (a + \ln a - \ln x)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

Assim, em  $\mathbb{R}^+$ , a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção B**

6. Se uma reta é perpendicular a um plano, o vetor diretor da reta, é colinear com o vetor normal do plano.

Da equação do plano *alpha* podemos observar que o vetor normal do plano é  $\vec{u} = (4, 0, -1)$

A reta definida pela condição da opção (A), tem um vetor diretor  $\vec{v}_A = (4, 1, 0)$ , que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}_A$

A reta definida pela condição da opção (B), tem um vetor diretor  $\vec{v}_B = (0, 1, 0)$ , que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}_B$

A reta definida pela condição da opção (C), tem um vetor diretor  $\vec{v}_C = (1, 0, 4)$ , que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}_C$

A reta definida pela condição da opção (D), tem um vetor diretor  $\vec{v}_D = (4, 0, -1)$ , que é colinear com o vetor normal do plano, visto que  $\vec{u} = \vec{v}_D$

Resposta: **Opção D**



7. Como

- $\overline{BC} = \sin \alpha$
- $\overline{OC} = \cos \alpha$

Temos que  $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos \alpha|$

Como  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , logo  $\cos \alpha < 0$ , pelo que  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

Assim,  $\overline{DC} = 3 - |\cos \alpha| = 3 - (-\cos \alpha) = 3 + \cos \alpha$

Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sin \alpha (3 + \cos \alpha)}{2} = \frac{1}{2} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1ª Fase

8. Como os vértices do hexágono são as imagens geométricas das 6 raízes de índice 6 de um número complexo  $z$ , então estão sobre uma circunferência centrado na origem.

Desta forma, sendo  $w_5 = \rho \operatorname{cis} \theta$  o número complexo cuja imagem geométrica é o vértice  $E$ , temos que:

$$\rho = |-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2^2 \times 2 + 2^2 \times 2} = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4$$

Como o vértice  $C$  pertence ao segundo quadrante é a imagem geométrica de um número complexo  $w_3$ , tal que  $\operatorname{Re}(w_3) = -\operatorname{Im}(w_3)$ , temos que

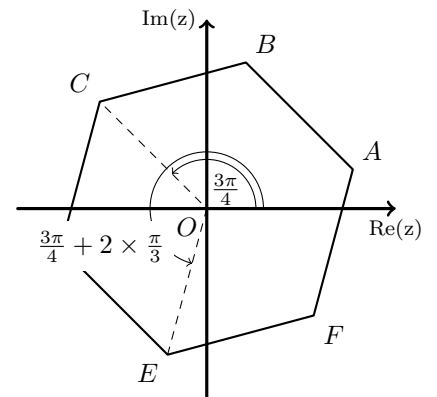
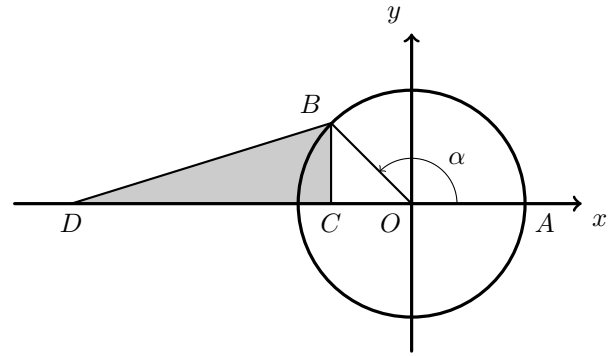
$$\arg(w_3) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Assim, como os argumentos dos números complexos que são raízes índice 6 de um mesmo número complexo diferem de  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ , temos que:

$$\theta = \arg(w_5) = \arg(w_3) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$$

$$\text{Logo } w_5 = 4 \operatorname{cis} \left( \frac{17\pi}{12} \right)$$

Resposta: **Opção D**



---

**GRUPO II**

---

1.

1.1. Escrevendo  $-1 + \sqrt{3}i$  na f.t. temos  $-1 + \sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde:

- $\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 2º quadrante, logo  
 $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim  $-1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

Pelo que  $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = \left(2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis} \left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} (2\pi) = 8 \operatorname{cis} 0$

Escrevendo  $1 - i$  na f.t. temos  $1 - i = \varphi \operatorname{cis} \beta$ , onde:

- $\varphi = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{1} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \beta < 0$  e  $\operatorname{cos} \beta > 0$ ,  $\beta$  é um ângulo do 4º quadrante, logo  $\beta = -\frac{\pi}{4} =$

Assim  $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Desta forma, calculando as potências, o quociente e o produto na f.t, vem:

$$\begin{aligned} z_1 \times (z_2)^2 &= \frac{8 \operatorname{cis} 0}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times (\operatorname{cis} \alpha)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \operatorname{cis} (2\alpha) = \frac{8\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \times \operatorname{cis} (2\alpha) = \\ &= 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \times \operatorname{cis} (2\alpha) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \end{aligned}$$

Logo, para que  $z_1 \times (z_2)^2$  seja um imaginário puro, temos que  $\arg (z_1 \times (z_2)^2) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Pelo que:

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\alpha \in [0, \pi[$ , concretizando os valores de  $k$ , temos que  $\alpha = \frac{\pi}{8}$  ( $k = 0$ ) e

$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$  ( $k = 1$ ) são os únicos valores de  $\alpha \in [0, \pi[$ , para os quais  $z_1 \times (z_2)^2$  é um imaginário puro.

1.2. Seja  $z = a + bi$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10 &\Leftrightarrow |1+(a+bi)|^2 + |1-(a+bi)|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2 \leq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{(1+a)^2 + b^2})^2 + (\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2})^2 \leq 10 \Leftrightarrow (1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + (-b)^2 \leq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2+2a^2+2b^2 \leq 10 \Leftrightarrow 1+a^2+b^2 \leq 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 4 \Leftrightarrow_{a^2+b^2 \geq 0} \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2 \end{aligned}$$

Exame – 2014, 1ª Fase



2.

2.1. Definindo o acontecimento  $M$ , como:

$M$ : «As bolas retiradas terem todas a mesma cor»

Pretende-se calcular:  $P(\overline{M}) = 1 - P(M)$

Como a caixa tem 9 bolas, e são retiradas 3, simultaneamente, temos que o número de casos possíveis é o número de conjuntos de 3 bolas:  ${}^9C_3$  (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Como na caixa, não existem nem 3 bolas brancas, nem 3 bolas amarelas, para que sejam todas da mesma cor têm que ser todas pretas, e por isso, o número de casos favoráveis, para o acontecimento  $M$ , é o número de conjuntos de 3 bolas pretas que podemos fazer com as 6 que estão na caixa:  ${}^6C_3$  (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Assim, temos que, a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor é:

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{16}{21}$$

2.2. Como  $X$  é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável  $X$  pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 1$ , se a primeira bola retirada for preta

$$P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

- $X = 2$ , se a primeira não for preta e a segunda sim, sabendo que a primeira que foi retirada não era preta  $P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- $X = 3$ , se a primeira não for preta, a segunda também não, sabendo que a primeira também não foi e a terceira ser preta, sabendo que as duas anteriores não o eram

$$P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 2}{7} = \frac{2}{4 \times 7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

- $X = 4$  se saírem sucessivamente as três bolas que não são pretas, pelo que a quarta bola será necessariamente uma bola preta

$$P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$  é:

|              |               |               |                |                |
|--------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $x_i$        | 1             | 2             | 3              | 4              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{84}$ |

3. De acordo com o enunciado  $P(A|B)$  é a probabilidade de, lançar o dado o dado duas vezes, e obter um número negativo no primeiro lançamento, sabendo que o produto dos dois números obtidos é positivo. Como sabemos que o produto dos números obtidos é positivo, pode ter resultado da multiplicação de dois números positivos ou de dois números negativos.

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Assim, temos que o número de casos possíveis resulta de considerar o produto de dois números negativos ( $1 \times 1$ ) ou dois números positivos ( $3 \times 3$ ), ou seja, um total de  $1 + 9 = 10$  casos possíveis.

Destes, apenas um (1) caso é favorável, nomeadamente o que corresponde à hipótese do produto positivo ter resultado da multiplicação de dois valores negativos, o que garante que o número saído no primeiro lançamento é negativo.

Assim temos que

$$P(A|B) = \frac{1}{10}$$



4. Como o ponto  $A$ , pertence ao eixo  $Ox$  e o cubo tem aresta 3, temos que  $A(3,0,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{HA}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{HA} = A - H = (3,0,0) - (3, -2,3) = (0, -(-2), -3) = (0,2, -3)$$

$$\|\overrightarrow{HA}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Da mesma forma, como o ponto  $C$ , pertence ao eixo  $Oy$  e o cubo tem aresta 3, temos que  $C(0, -3,0)$  e podemos calcular as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{HC}$ , e a sua norma:

$$\overrightarrow{HC} = C - H = (0, -3,0) - (3, -2,3) = (-3, -3+2, -3) = (-3, -1, -3)$$

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

Podemos ainda calcular o produto escalar  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$ :

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = (0,2, -3) \cdot (-3, -1, -3) = 0 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-3) \times (-3) = 0 - 2 + 9 = 7$$

E assim, temos que  $\alpha$  é o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{HA}$  e  $\overrightarrow{HC}$ , pelo que, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:

$$\cos(\alpha) = \cos(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}}{\|\overrightarrow{HA}\| \times \|\overrightarrow{HC}\|} = \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$

Pela fórmula fundamental da Trigonometria, temos que

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

Logo temos que o valor exato de  $\sin^2 \alpha$  é

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 - \frac{7^2}{247} = \frac{247}{247} - \frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

5.

5.1. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 4$ , temos que verificar se  $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

- $f(4) = \ln(2e^4 - e^4) = \ln(e^4) = 4 \ln e = 4 \times 1 = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\ln(2e^x - e^4)) = \ln(2e^4 - e^4) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}\right) = \frac{e^{4-4} - 3(4) + 11}{4 - 4} = \frac{e^1 - 12 + 11}{4 - 4} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(4 - x)}\right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x - 4)}\right) =$$

(fazendo  $y = x - 4$ , temos  $x = y + 4$  e se  $x \rightarrow 4^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3(y + 4) + 11}{-y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 12 + 11}{-y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 1}{-y}\right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y} + \frac{-3y}{-y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y}\right) + \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{-3y}{-y}\right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{y \rightarrow 0^-} 3 = -1 + 3 = 2$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ , pelo que a função  $f$  não é contínua em  $x = 4$



5.2. Como o gráfico da função  $f$  tem uma assíntota oblíqua quando  $x$  tende para  $+\infty$ , de equação  $y = x + b$ , ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de  $b$ , vem que

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) \stackrel{x = \ln e^x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{2e^x - e^4}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{2e^x}{e^x} - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) = \\ &= \ln \left( 2 - \frac{e^4}{e^{+\infty}} \right) = \ln(2 - 0) = \ln 2 \end{aligned}$$

6.

6.1. Como  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin(\pi) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

6.2. Começando por determinar  $f''$  temos:




$$f''(x) = (f'(x))' = (x - \sin(2x))' = (x)' - (\sin(2x))' = 1 - (2x)' \cos(2x) = 1 - 2 \cos(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de  $f''$ :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2 \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, as únicas soluções da equação  $f''(x) = 0$  que pertencem ao intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right]$ , são  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = -\frac{\pi}{6}$  (obtidas com  $k = 0$ ).

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

|          |                  |   |                  |   |                 |   |                 |
|----------|------------------|---|------------------|---|-----------------|---|-----------------|
| $x$      | $-\frac{\pi}{2}$ |   | $-\frac{\pi}{6}$ |   | $\frac{\pi}{6}$ |   | $\frac{\pi}{4}$ |
| $f''(x)$ | n.d.             | +   | 0                | -   | 0               | +   | n.d.            |
| $f(x)$   | n.d.             |  | Pt. I.           |  | Pt. I.          |  | n.d.            |

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right]$  e no intervalo  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $\left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$
- tem dois pontos de inflexão de abcissas, cujas abcissas são  $x = -\frac{\pi}{6}$  e  $x = \frac{\pi}{6}$



7. Seja  $k$  a abscissa do ponto  $B$  ( $k \in \mathbb{R}^-$ ).

Como o ponto  $B$  pertence ao gráfico da função  $f$ , tem coordenadas  $(k, f(k))$ , e como o ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem ordenada igual à do ponto  $B$ , tem coordenadas  $(0, f(k))$

Podemos ainda considerar a mediada da base do triângulo como  $b = |k|$ , e a altura como a diferença das ordenadas dos pontos  $C$  e  $A$ , ou seja,  $a = f(k) - (-2) = f(k) + 2$

Assim, a área do triângulo  $[ABC]$  é

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times a}{2} = \frac{|k| \times (f(k) + 2)}{2} \stackrel{k < 0}{=} \frac{-k \times (f(k) + 2)}{2} = \frac{-k \times (-\ln(k + e^2) + 2)}{2}$$

E como a área do triângulo  $[ABC]$  é igual a 8, temos que

$$\frac{-k \times (-\ln(k + e^2) + 2)}{2} = 8 \Leftrightarrow -k \times (-\ln(k + e^2) + 2) = 16$$

Pelo que a abscissa do ponto  $B$  é a solução negativa da equação anterior.

Assim a abscissa do ponto  $B$  é a interseção da reta de equação  $y = 16$  com o gráfico da função  $f$ , sendo

$$f(x) = -x \times (-\ln(x + e^2) + 2), x \in \mathbb{R}^-$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $f$ , numa janela coerente com o domínio da função, e a reta de equação  $y = 16$  (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abscissa do ponto  $B$ ,  $x_B \approx -6,71$

