Exame final nacional de Matemática A (2014, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Sabemos que $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} \Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B|\overline{A}) \times P\left(\overline{A}\right)$

   Como $P(A) = 0{,}4$, temos que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
   Como $P(B|\overline{A}) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$, temos que $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$

   Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B \setminus A) = P(B - A)$, temos que

   $$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; P(B) = P\left(B \cap \overline{A}\right) + P(A \cap B)$$

   Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}48$ e $P(A \cap B) = 0{,}2$, vem que

   $$P(B) = 0{,}48 + 0{,}2 = 0{,}68$$

   Resposta: **Opção C**

2. Se o número tem 10 posições (algarismos), das quais 6 serão ocupadas por algarismo 2, o número de conjuntos diferentes de 6 posições para os algarismos 2 é ${}^{10}C_6$ (por não interessar a ordem, uma vez que as posições serão ocupadas por elementos iguais).

   Por cada um destes conjuntos, podemos colocar nas restantes 4 posições (algarismos) 8 elementos (os algarismos de 3 a 9 e mais o algarismo 1), eventualmente repetidos.
   Assim, considerando a ordem como relevante (por poderem ser algarismos diferentes), temos ${}^{8}A'_4 = 8^4$ grupos diferentes.

   Logo o total de números diferentes que existem, nas condições definidas, é ${}^{10}C_6 \times 8^4$

   Resposta: **Opção A**

3. Como $\lim x_n = \lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$, então

   $$\lim f\left(x_n\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

   E assim

   $$\lim \frac{2}{f\left(x_n\right)} = \frac{\lim 2}{\lim f\left(x_n\right)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

   Resposta: **Opção C**

4. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[0,1]$.

   Como o teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[, então, pelo hipótese do teorema de Bolzano, sabemos que zero está compreendido entre $f(0)$ e $f(1)$, e pelo corolário do teorema de Bolzano temos que $f(0) \times f(1) < 0$

   Assim, temos que $f(0) = ke^0 + 0 = k \times 1 = k$ e $f(1) = ke^1 + 1 = ke + 1$

   Calculando os zeros de $f(0) \times f(1)$, temos

$$f(0) \times f(1) = 0 \Leftrightarrow k \times (ke+1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee ke + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{e}$$

   E, estudando o sinal de $f(0) \times f(1)$ vem que:

k	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0	$+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ke+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(0) \times f(1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Pelo que verificamos que $f(0) \times f(1) < 0$ se $k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

   Resposta: **Opção B**

5. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left(a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = \left(a + \ln a - \ln x\right)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

   Assim, em $\mathbb{R}^+$, a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

   Resposta: **Opção B**

6. Se uma reta é perpendicular a um plano, o vetor diretor da reta, é colinear com o vetor normal do plano.

   Da equação do plano *alpha* podemos observar que o vertor normal do plano é $\vec{u} = (4,0,-1)$

   A reta definida pela condição da opção (A), tem um vetor diretor $\vec{v}_A = (4,1,0)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_A$

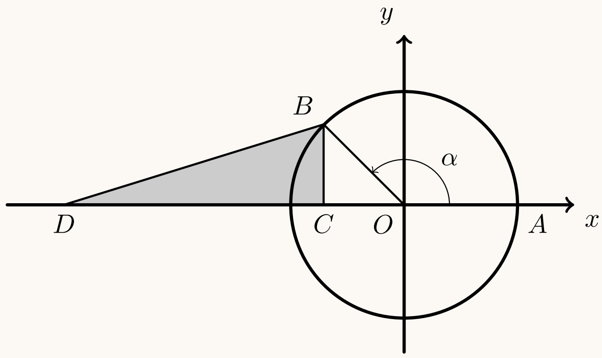
   A reta definida pela condição da opção (B), tem um vetor diretor $\vec{v}_B = (0,1,0)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_B$

   A reta definida pela condição da opção (C), tem um vetor diretor $\vec{v}_C = (1,0,4)$, que não é colinear com o vetor normal do plano, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}_C$

   A reta definida pela condição da opção (D), tem um vetor diretor $\vec{v}_D = (4,0,-1)$, que é colinear com o vetor normal do plano, visto que $\vec{u} = \vec{v}_C$

   Resposta: **Opção D**

7. Como
   - $\overline{BC} = \operatorname{sen} \alpha$
   - $\overline{OC} = \cos \alpha$

   Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos \alpha|$

   Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\cos \alpha < 0$, pelo que $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

   Assim, $\overline{DC} = 3 - |\cos \alpha| = 3 - (-\cos \alpha) = 3 + \cos \alpha$

   Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha (3 + \cos \alpha)}{2} = \frac{1}{2}(3 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha$$

   Resposta: **Opção C**

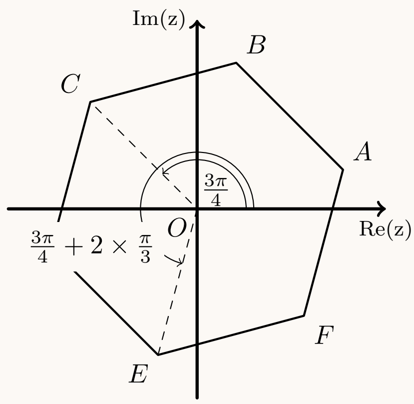
Exame – 2014, 1.ª Fase

8. Como os vértices do hexágono são as imagens geométricas das 6 raízes de índice 6 de um número complexo z, então estão sobre uma circunferência centrado na origem.

   Desta forma, sendo $w_5 = \rho \operatorname{cis} \theta$ o número complexo cuja imagem geométrica é o vértice E, temos que:

$$\rho = |-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 \times 2 + 2^2 \times 2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

   Como o vértice C pertence ao segundo quadrante é a imagem geométrica de um número complexo w_3, tal que $\operatorname{Re}(w_3) = -\operatorname{Im}(w_3)$, temos que $\arg(w_3) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

   Assim, como os argumentos dos números complexos que são raízes índice 6 de um mesmo número complexo diferem de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, temos que:

$$\theta = \arg(w_5) = \arg(w_3) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$$

   Logo $w_5 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $-1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim $-1+\sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$

Pelo que $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3\operatorname{cis}\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$

Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $1-i = \varphi\operatorname{cis}\beta$, onde:

- $\varphi = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\beta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\beta < 0$ e $\cos\beta > 0$, β é um ângulo do 4º quadrante, logo $\beta = -\frac{\pi}{4} =$

Assim $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Desta forma, calculando as potências, o quociente e o produto na f.t, vem:

$$z_1\times(z_2)^2 = \frac{8\operatorname{cis}0}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times(\operatorname{cis}\alpha)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\operatorname{cis}(2\alpha) = \frac{8\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) =$$

$$= 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\times\operatorname{cis}(2\alpha) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$$

Logo, para que $z_1\times(z_2)^2$ seja um imaginário puro, temos que $\arg\left(z_1\times(z_2)^2\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$. Pelo que:

$$\frac{\pi}{4}+2\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in[0,\pi[$, concretizando os valores de k, temos que $\alpha = \frac{\pi}{8}$ $(k=0)$ e $\alpha = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$ $(k=1)$ são os únicos valores de $\alpha\in[0,\pi[$, para os quais $z_1\times(z_2)^2$ é um imaginário puro.

1.2. Seja $z = a+bi$
Assim, vem que:

$$|1+z|^2+|1-z|^2\leq 10 \Leftrightarrow |1+(a+bi)|^2+|1-(a+bi)|^2\leq 10 \Leftrightarrow |1+a+bi|^2+|1-a-bi|^2\leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2\leq 10 \Leftrightarrow (1+a)^2+b^2+(1-a)^2+(-b)^2\leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2\leq 10 \Leftrightarrow 2+2a^2+2b^2\leq 10 \Leftrightarrow 1+a^2+b^2\leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 4 \underset{a^2+b^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{a^2+b^2}\leq\sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\leq 2 \Leftrightarrow |z|\leq 2$$

2.

2.1. Definindo o acontecimento M, como:
M: ≪As bolas retiradas terem todas a mesma cor≫
Pretende-se calcular: $P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M)$

Como a caixa tem 9 bolas, e são retiradas 3, simultâneamente, temos que o número de casos possíveis é o número de conjuntos de 3 bolas: ${}^9C_3$ (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Como na caixa, não existem nem 3 bolas brancas, nem 3 bolas amarelas, para que sejam todas da mesma cor têm que ser todas pretas, e por isso, o número de casos favoráveis, para o acontecimento M, é o número de conjuntos de 3 bolas pretas que podemos fazer com as 6 que estão na caixa: ${}^6C_3$ (a ordem é irrelevante por serem retiradas simultaneamente).

Assim, temos que, a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor é:

$$P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M) = 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{16}{21}$$

2.2. Como X é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 1$, se a primeira bola retirada for preta
  $P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $X = 2$, se a primeira não for preta e a segunda sim, sabendo que a primeira que foi retirada não era preta $P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $X = 3$, se a primeira não for preta, a segunda também não, sabendo que a primeira também não foi e a terceira ser preta, sabendo que as duas anteriores não o eram
  $P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3 \times 2}{7} = \frac{2}{4 \times 7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$
- $X = 4$ se saírem sucessivamente as três bolas que não são pretas, pelo que a quarta bola será necessariamente uma bola preta
  $P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3. De acordo com o enunciado $P(A|B)$ é a probabilidade de, lançar o dado o dado duas vezes, e obter um número negativo no primeiro lançamento, sabendo que o produto dos dois números obtidos é positivo.
   Como sabemos que o produto dos números obtidos é positivo, pode ter resultado da multiplicação de dois números positivos ou de dois números negativos.

   De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
   Assim, temos que o número de casos possíveis resulta de considerar o produto de dois números negativos (1×1) ou dois números positivos (3×3), ou seja, um total de $1 + 9 = 10$ casos possíveis.
   Destes, apenas um (1) caso é favorável, nomeadamente o que corresponde à hipótese do produto positivo ter resultado da multiplicação de dois valores negativos, o que garante que o número saído no primeiro lançamento é negativo.
   Assim temos que:
   $$P(A|B) = \frac{1}{10}$$

4. Como o ponto A, pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 3, temos que $A(3,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HA}$, e a sua norma:
   $$\overrightarrow{HA} = A - H = (3,0,0) - (3,-2,3) = (0,-(-2),-3) = (0,2,-3)$$
   $$\left\|\overrightarrow{HA}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
   Da mesma forma, como o ponto C, pertence ao eixo Oy e o cubo tem aresta 3, temos que $C(0,-3,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HC}$, e a sua norma:
   $$\overrightarrow{HC} = C - H = (0,-3,0) - (3,-2,3) = (-3,-3+2,-3) = (-3,-1,-3)$$
   $$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$
   Podemos ainda calcular o produto escalar $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AP}$:
   $$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC} = (0,2,-3).(-3,-1,-3) = 0 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-3) \times (-3) = 0 - 2 + 9 = 7$$
   E assim, temos que α é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HC}$, pelo que, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:
   $$\cos(\alpha) = \cos\left(\overrightarrow{HA}\hat{\ }\overrightarrow{HC}\right) = \frac{\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HC}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$
   Pela fórmula fundamental da Trigonometria, temos que
   $$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$
   Logo temos que o valor exato de $\operatorname{sen}^2\alpha$ é
   $$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 - \frac{7^2}{247} = \frac{247}{247} - \frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

5.

5.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=4$, temos que verificar se $f(4)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

- $f(4)=\ln(2e^4-e^4)=\ln(e^4)=4\ln e=4\times 1=4$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\ln(2e^x-e^4)\right)=\ln(2e^4-e^4)=4$
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right)=\dfrac{e^{4-4}-3(4)+11}{4-4}=\dfrac{e^1-12+11}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{4-x}\right)=\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{-(-4+x)}\right)=\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{e^{x-4}-3x+11}{-(x-4)}\right)=$$

(fazendo $y=x-4$, temos $x=y+4$ e se $x\to 4^-$, então $y\to 0^-$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-3(y+4)+11}{-y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-3y-12+11}{-y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-3y-1}{-y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{-y}+\frac{-3y}{-y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{-y}\right)+\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{-3y}{-y}\right)=-\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}+\lim_{y\to 0^-}3=-1+3=2$$

Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x=4$

5.2. Como o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y = x+b$, ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de b, vem que

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(2e^x - e^4) - x\right) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(2e^x - e^4) - x\right) \underset{x=\ln e^x}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x} - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^{+\infty}}\right) = \ln(2-0) = \ln 2$$

6.

6.1. Como $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(\pi) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

temos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

6.2. Começando por determinar f'' temos:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big) = \big(x - \operatorname{sen}(2x)\big)' = (x)' - \big(\operatorname{sen}(2x)\big)' = 1 - (2x)'\cos(2x) = 1 - 2\cos(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de f'':

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2\cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\vee\, 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + k\pi \,\vee\, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \,, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, as únicas soluções da equação $f''(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{6}$ (obtidas com $k = 0$).

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f''	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$
- tem dois pontos de inflexão de abcissas, cujas abcissas são $x = -\frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{6}$

7. Seja k a abcissa do ponto B $(k \in \mathbb{R}^-)$.
Como o ponto B pertence ao gráfico da função f, tem coordenadas $\big(k,f(k)\big)$, e como o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B, tem coordenadas $\big(0,f(k)\big)$

Podemos ainda considerar a mediada da base do triângulo como $b = |k|$, e a altura como a diferença das ordenadas dos pontos C e A, ou seja, $a = f(k) - (-2) = f(k) + 2$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times a}{2} = \frac{|k| \times (f(k)+2)}{2} \underset{k<0}{=} \frac{-k \times (f(k)+2)}{2} = \frac{-k \times (-\ln(k+e^2)+2)}{2}$$

E como a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8, temos que

$$\frac{-k \times (-\ln(k+e^2)+2)}{2} = 8 \Leftrightarrow -k \times (-\ln(k+e^2)+2) = 16$$

Pelo que a abcissa do ponto B é a solução negativa da equação anterior.

Assim a abcissa do ponto B é a interseção da reta de equação $y = 16$ com o gráfico da função f, sendo

$$f(x) = -x \times (-\ln(x+e^2)+2), x \in \mathbb{R}^-$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela coerente com o domínio da função, e a reta de equação $y = 16$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto B, $x_B \approx -6{,}71$