Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2014 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:
$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{A\cup B}\right) = 1 - P(A\cup B)$ então

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - P(A\cup B) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - 0{,}48 = P(A\cup B) \Leftrightarrow 0{,}52 = P(A\cup B)$$

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$, logo

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \Leftrightarrow P(A)\times P(B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

Substituíndo os valores das probabilidade, vem

$$0{,}4\times P(B) = 0{,}4 + P(B) - 0{,}52 \Leftrightarrow 0{,}4\times 0{,}52 - 0{,}4 = P(B) - 0{,}4\times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}12 = P(B)\times\Big(1 - 0{,}4\Big) \Leftrightarrow 0{,}12 = P(B)\times 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{0{,}12}{0{,}6} = P(B) \Leftrightarrow 0{,}2 = P(B)$$

Resposta: **Opção C**

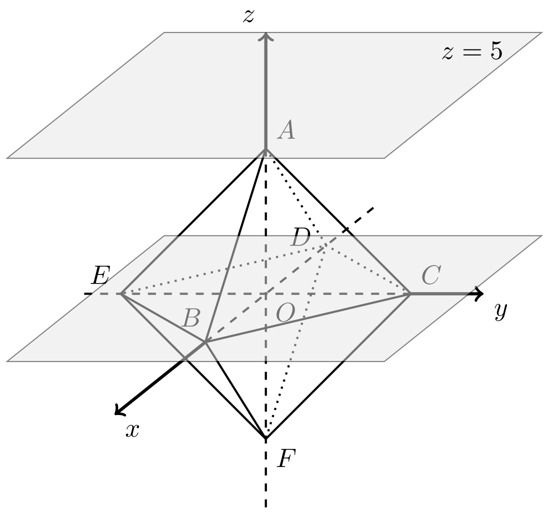
2. Um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$, definido com 3 vértice do octaedro só pode ser o plano de equação $z = 0$, ou seja definido por 3 dos 4 pontos B, C, D ou E.

Assim, como para a definição do plano, é irrelevante a ordem dos pontos, existem ${}^6C_3$ planos distintos que podem ser definidos com 3 pontos quaisquer do octaedro; e ${}^4C_3 = 4$ planos definidos com 3 dos 4 vértices B, C, D ou E.

Assim, a probabilidade de escolher, ao acaso, três vértices do octaedro e esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$ é

$$\frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4}{{}^6C_3}$$

Resposta: **Opção B**



3. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$ são da forma

$$^{10}C_k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} (x)^k =^{10} C_k \frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}} \ , \ \ k \in \{0,1,...,10\}$$

Ou seja, o termo que não depende da variável x é o termo em que $\frac{2^{10-k}(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k} \times \frac{(x)^k}{x^{10-k}} = 2^{10-k} \times 1$, ou seja, em que, $k = 10-k$
Assim, temos que, $k = 10-k \ \Leftrightarrow \ 2k = 10 \ \Leftrightarrow \ k = 5$

Logo, no termo em causa $k = 5$, ou seja, é o termo

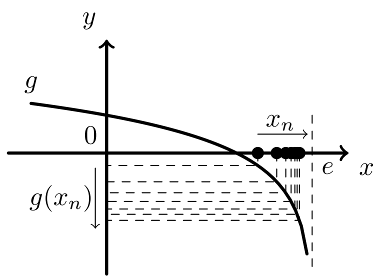
$$^{10}C_5 \left(\frac{2}{5}\right)^{10-5} (x)^5 = \ ^{10}C_5 \left(\frac{2}{5}\right)^{5} (x)^5 = \ ^{10}C_5 \frac{2^5 \times x^5}{x^5} = \ ^{10}C_5 \times 2^5 = \ 8\,064$$

Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim x_n = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e^-$, então

$$\lim g\left(x_n\right) = \lim_{x\to e^-} g(x) = \ln(e - e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção D**

5. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k-3$
E calculando $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Se } y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ então } x = y + \frac{\pi}{2} \\ \\ x \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y \to 0^- \end{array} \right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \qquad \left(\cos\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} y\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = -\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

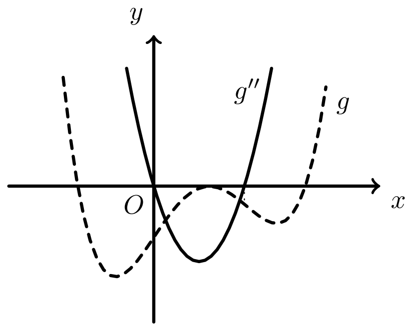
Assim, temos que

$$k-3 = -1 \ \Leftrightarrow \ k = -1+3 \ \Leftrightarrow \ k = 2$$

Resposta: **Opção C**

6. Por observação do gráfico de g'',podemos estudar o sinal da segunda derivada e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de g (designa-se por a, o zero de g'' maior que zero).

x		0		a	
$g''(x)$	+	0	$-$	0	+
$g(x)$	$\cup$	Pt. I.	$\cap$	Pt. I.	$\cup$



O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Os planos definidos pelas equações das opções (C) e (D) não contêm o ponto A, porque substituindo as coordenadas do ponto nas equações, obtemos proposições falsas:
(C) $2(1)-3(0)+(3)=0 \Leftrightarrow 2-0+3=0 \Leftrightarrow 5=0$ e (D) $3(1)+2(0)=0 \Leftrightarrow 3+0=0 \Leftrightarrow 3=0$

O plano definido pela equação da opção (A) não é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha}=(3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_A}=(3,2,0)$ são colineares, ou seja, os planos são paralelos e não perpendiculares.

O plano definido pela equação da opção (B) é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha}=(3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_B}=(2,-3,-1)$ têm um produto escalar nulo, ou seja são perpendiculares, assim, como os planos:

$$\overrightarrow{v_\alpha}.\overrightarrow{v_B}=(3,2,0).(2,-3,-1)=3\times 2+2(-3)+0(-1)=6-6+0=0$$

e este plano contém o ponto A, porque com a substituição das coordenadas deste ponto, obtemos uma proposição verdadeira:

$$2(1)-3(0)-3+1=0 \Leftrightarrow 2-0-3+1=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Resposta: **Opção B**

8. Os pontos da zona sombreada pertencem ao exterior da circunferência de centro na imagem geométrica do número complexo $2i$ e raio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, a distância à imagem geométrica de $2i$ é superior a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, os números complexos z verificam a condição $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como os pontos da região sombreada representam números complexos cujo argumento está compreendido entre $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ e $\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$ vamos determinar estes argumentos.

Seja $\theta_1=\arg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)$, assim temos que $\operatorname{tg}(\theta_1)=\frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

Como θ_1 é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

Analogamente temos que $\theta_2=\arg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i\right)=\frac{2\pi}{3}$

E assim, os números complexos z verificam a condição condição anterior, e cumulativamente, a condição $\frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo z na f.a. temos:

$$z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \times \frac{2}{2} = \sqrt{3} + i$$

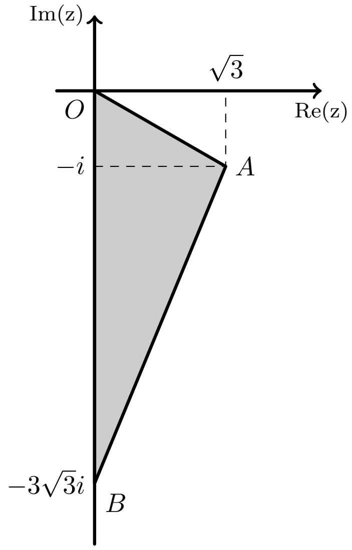
Assim temos que

$$\overline{z} = \overline{\sqrt{3}+i} = \sqrt{3} - i$$

E, simplificando a expressão que define w, substituíndo z, vem:

$$w = \frac{(z-i)^4}{1+zi} = \frac{(\sqrt{3}+i-i)^4}{1+\left(\sqrt{3}+i\right)i} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1+\sqrt{3}i+i^2} = \frac{3^2}{1+\sqrt{3}i-1} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times \sqrt{3} \times i}{(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{9\sqrt{3}i}{3 \times (-1)} = -3\sqrt{3}i$$



Assim, podemos fazer a representação do triângulo $[AOB]$, como na figura ao lado.

Por observação da figura, temos que a área do triângulo $[AOB]$ é

$$A_{[AOB]} = \frac{\operatorname{Re}(z) \times |\operatorname{Im}(w)|}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

1.2. Considerando a equação na forma $az^2 + bz + c = 0$, com $a = 1$, $b = -2\cos\alpha$ e $c = 1$, temos uma equação do segundo grau na variável z.
Assim,

$$z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-(-2\cos\alpha) \pm \sqrt{(-2\cos\alpha)^2 - 4(1)(1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4(\cos^2\alpha - 1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4(1-\cos^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{-4(\operatorname{sen}^2\alpha)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \left(\sqrt{-4} \times \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \left(\sqrt{-1} \times \sqrt{4}\operatorname{sen}\alpha\right)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm 2i\operatorname{sen}\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \vee z = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = \operatorname{cis}\alpha \vee z = \operatorname{cis}(-\alpha)$$

Resposta: A equação tem duas soluções, que são, na f.t. em função de α: $\operatorname{cis}\alpha$ e $\operatorname{cis}(-\alpha)$

2.

2.1. Como existem 6 posições de colocação, temos ${}^6C_2$ colocações possíveis para as 2 bolas azuis (como as bolas da mesma cor são indistinguíveis, não se considera relevante a ordem).
Como se pretende que as 2 bolas azuis fiquem em ao lado uma da outra, apenas 5, das colocações anteriores são favoráveis, no sentido que verificam esta restrição (as posições 1-2,2-3,3-4,4-5 e 5-6).
Assim, a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra, é

$$\frac{5}{{}^6C_2} = \frac{1}{3}$$

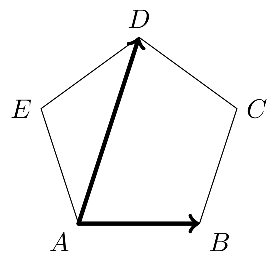
2.2. Como X é o número de bolas azuais retiradas da caixa, a variável X pode tomar os seguintes valores, com as respetivas probabilidades:

- $X = 0$, se todas as bolas forem pretas (como se retiram 3 bolas e existem 4 pretas, podem ser todas pretas)
  $P(X = 0) = \dfrac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \dfrac{1}{5}$
- $X = 1$, se retirarmos 1 bola azul (de entre as 2 que existem) e 2 bolas pretas (de entre as 4 que existem)
  $P(X = 1) = \dfrac{{}^2C_1 \times {}^4C_2}{{}^6C_3} = \dfrac{3}{5}$
- $X = 2$, se retirarmos as 2 bolas azuis e 1 das 4 pretas que existem
  $P(X = 2) = \dfrac{{}^2C_2 \times {}^4C_1}{{}^6C_3} = \dfrac{1}{5}$

Logo a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Como a soma dos ângulos externos de um polígono é 2π, o ângulo externo em A tem de amplitude $\dfrac{2\pi}{5}$ e assim, podemos calcular a amplitude do ângulo BAE:



$$B\hat{A}E = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

Como $E\hat{A}D = E\hat{D}A$ (porque se opõem a lados iguais), $E\hat{A}D + E\hat{D}A + A\hat{E}D = \pi$ (porque são os ângulos internos de um triângulo) e $A\hat{E}D = B\hat{A}E$, temos que

$$E\hat{A}D + E\hat{A}D + \frac{3\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \pi - \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{2\pi}{2 \times 5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{\pi}{5}$$

Como $B\hat{A}E = B\hat{A}D + E\hat{A}D \Leftrightarrow B\hat{A}D = B\hat{A}E - E\hat{A}D$ vem que

$$B\hat{A}D = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

Assim, vem que,

$$\frac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AD}\right)}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}D\right) \underset{\overline{AB}=1}{=} \cos\left(B\hat{A}D\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Como $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ vem que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

4.

4.1. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é $]-\infty,0[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=0$

Para averiguar se a reta de equação $x=0$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} x - \lim_{x\to 0^-} 1 + \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{x} =$$

$$= 0-1+\frac{\ln(-0^-)}{0^-} = -1+\frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1+\frac{-\infty}{0^-} = -1+\infty = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de f é $]-\infty,0[$, só poderão existir quando $x\to-\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+\frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right) =$$

$$= 1+0+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1-0+\frac{+\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$m = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times\frac{\ln(y)}{y}\right) =$$

$$= 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1+\frac{1}{+\infty}\times 0 = 1+0\times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-1\times x\big) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) =$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$b = -1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x} = -1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1-0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

4.2.

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-\infty,0[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[-e,-1]$.

Como $-4{,}09 < -e < -2$, ou seja, $f(-e) < -e < f(-1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-e,-1[$ tal que $f(c)=-e$, ou seja, que a equação $f(x)=-e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,-1[$

C.A.

$$f(-e) = -e-1+\frac{\ln(-(-e))}{-e} = -e-1-\frac{\ln(e)}{e} \approx -4{,}09$$

$$f(-1) = -1-1+\frac{\ln(-(-1))}{-1} = -2-\ln(1) = -2-0 = -2$$

$-e \approx -2{,}72$

4.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, para $x < 0$:

$$g'(x) = \Big(-x + f(x)\Big)' = \left(-x + x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = -(1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' =$$

$$= -0 + \frac{(\ln(-x))'x - \ln(-x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{(-x)'}{-x} \times x - \ln(-x)(1)}{x^2} = \frac{\frac{-1}{-x} \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V, pq } x<0} \Leftrightarrow 1 = \ln(-x) \Leftrightarrow -x = e^1 \Leftrightarrow x = -e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-e$		0
$1 - \ln(-x)$	$-$	0	$+$	n.d.
x^2	$+$	$+$	$+$	n.d.
$g'(x)$	$-$	0	$+$	n.d.
$g(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]-\infty, -e]$;
- é crescente no intervalo $[-e,0[$;
- tem um mínimo para $x = -e$

5. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.
Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos\alpha$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times 4\cos\alpha}{2} = 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$, temos que:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3} \underset{\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \cos\theta = \frac{1}{3}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \underset{\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, recorrendo à fórmula de $A(\alpha)$, deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

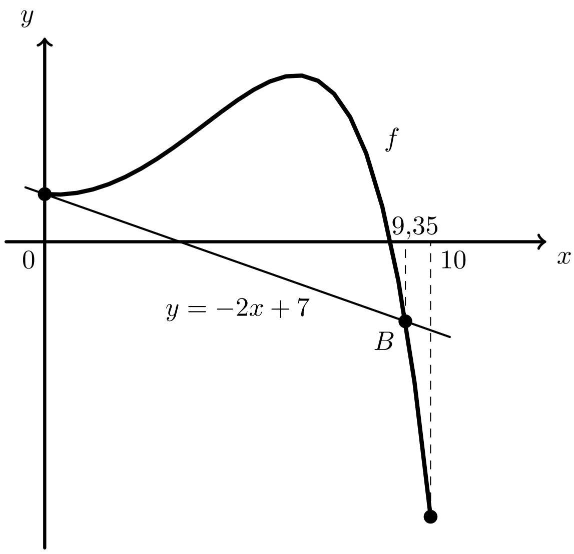
6. Como o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, tem abcissa $x = 0$; como também pertence ao gráfico de f, tem ordenada $f(0)$. Assim, calculando a ordenada do ponto A, temos:

$$f(0) = -e^{\frac{0}{2}} + 0^2 + 8 = -e^0 + 0 + 8 = -1 + 8 = 7$$

A reta AB tem declive -2 e passa no ponto A, logo é a reta de equação $y = -2x + 7$, e assim, o ponto B é a interseção da reta AB com o gráfico da função f, pelo que a abcissa do ponto B é a solução da equação

$$f(x) = -2x + 7 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela coerente com o domínio da função, e a reta AB (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto B, $x_B \approx 9{,}35$



7. Relativamente à afirmação **(I)**, podemos estudar a variação do sinal da função h', derivada de h (recorrendo à observação do gráfico de f), e relacionar com a monotonia de h:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
f	$+$	0	$+$	0	$-$
e^{2x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função h é crescente no intervalo $]-\infty,3]$ e decrescente no intervalo $[3,+\infty[$, pelo que tem um único extremo (para $x=3$), ou seja a afirmação **(I)** é **falsa**.

Relativamente à afirmação **(II)**, temos que

$$h''(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(2x)'e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)} = \frac{e^{2x}\left(f'(x) - f(x)\times 2\right)}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$$

Como -2 é um zero de f, temos que $f(-2)=0$, e como f tem um extremo relativo em $x=-2$, então $f'(-2)=0$, e assim, vem que:

$$h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{2\times(-2)}} = \frac{0 - 2\times 0}{e^{-4}} = \frac{0}{e^{-4}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a afirmação **(II)** é **verdadeira**.

Relativamente à afirmação **(III)**, como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$, podemos concluir que quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y=3$ é uma assíntota do gráfico de h.
Assim, quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$ não pode ser assíntota do gráfico de h, pelo que podemos afirmar que a afirmação **(III)** é **falsa**.