

---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 635/1.ª Fase**

15 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2015**

**VERSÃO 1**

---

**Página em branco**

---

---

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

**Página em branco**

---

# Formulário

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume da pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume do cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume da esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

## Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

---

**Página em branco**

---

## GRUPO I

---

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

- (A) 12                      (B) 24                      (C) 48                      (D) 60

2. Seja  $\Omega$ , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,4$
- $P(\overline{B}) = 0,7$
- $P(A \cup B) = 0,5$

Qual é o valor de  $P(\overline{A \cup B})$  ?

- (A) 0,6                      (B) 0,7                      (C) 0,8                      (D) 0,9

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real  $k$ , igual a  $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$  ?

- (A)  $\frac{k}{2}$                       (B)  $k - 2$                       (C)  $\frac{k}{9}$                       (D)  $k - 9$

4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

Considere a sucessão de termo geral  $u_n = n^2$

Qual é o valor de  $\lim f(u_n)$  ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C)  $e$                       (D)  $+\infty$

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $C$  tem coordenadas  $(1, 0)$
- o ponto  $D$  pertence à semirreta  $\hat{OA}$
- os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[DC]$  são paralelos ao eixo  $Oy$

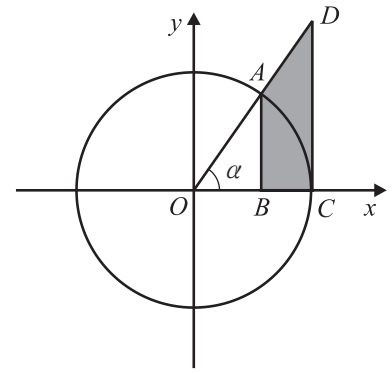


Figura 1

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $COD$   $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero  $[ABCD]$ , representado a sombreado, em função de  $\alpha$  ?

(A)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C)  $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D)  $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A)  $\pi$

(B)  $2\pi$

(C)  $3\pi$

(D)  $4\pi$



7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , um triângulo equilátero  $[ABC]$

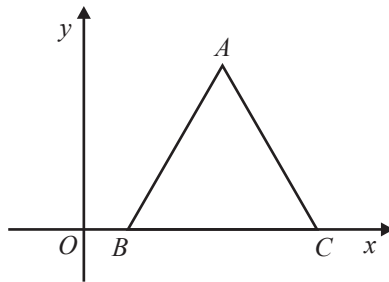


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem ordenada positiva;
- os pontos  $B$  e  $C$  pertencem ao eixo  $Ox$
- o ponto  $B$  tem abcissa 1 e o ponto  $C$  tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta  $AB$  ?

(A)  $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

(B)  $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

(C)  $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D)  $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

8. Seja  $a$  um número real.

Considere a sucessão  $(u_n)$  definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A)  $6a + 4$

(B)  $9a - 4$

(C)  $6a - 4$

(D)  $9a + 4$

---

**Página em branco**

---

## GRUPO II

---

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta}$

Determine os valores de  $\theta$  pertencentes ao intervalo  $]0, 2\pi[$ , para os quais  $z$  é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto  $P$  por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é despreendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que,  $t$  segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto  $P$  é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

3.1. Sabe-se que a distância do ponto  $P$  à base do recipiente é 16 cm

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em  $\text{cm}^3$ , arredondado às centésimas.

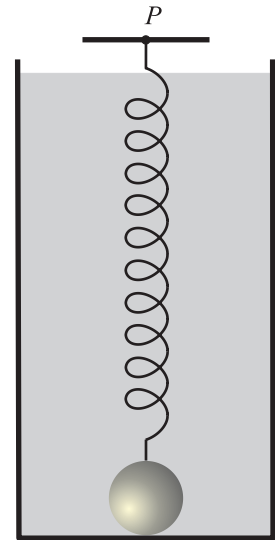


Figura 3

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto  $P$  é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x + 1) \ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função  $f$

4.2. Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$

4.3. Mostre que a equação  $f(x) = 3$  é possível em  $]1, e[$  e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação  $f(x) = 3$  tem, pelo menos, uma solução no intervalo  $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

5. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os pontos  $A(0, 0, 2)$  e  $B(4, 0, 0)$

5.1. Considere o plano  $\alpha$  de equação  $x - 2y + z + 3 = 0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto  $A$  e é paralelo ao plano  $\alpha$

5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta  $[AB]$  é um diâmetro.

5.3. Seja  $P$  o ponto pertencente ao plano  $xOy$  tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto  $B$
- a sua ordenada é positiva;
- $\widehat{BAP} = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto  $P$

6. Sejam  $f$  e  $g$  as funções, de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(3x)$$

Seja  $a$  um número real pertencente ao intervalo  $\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$

Considere as retas  $r$  e  $s$  tais que:

- a reta  $r$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $a$
- a reta  $s$  é tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa  $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares.

Mostre que  $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$

**FIM**

---

**Página em branco**

---

## COTAÇÕES

### GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos) .....	40 pontos
	<hr/>
	<b>40 pontos</b>

### GRUPO II

1. ....	15 pontos
2.	
2.1. ....	15 pontos
2.2. ....	15 pontos
3.	
3.1. ....	10 pontos
3.2. ....	15 pontos
4.	
4.1. ....	15 pontos
4.2. ....	15 pontos
4.3. ....	15 pontos
5.	
5.1. ....	5 pontos
5.2. ....	10 pontos
5.3. ....	15 pontos
6. ....	15 pontos
	<hr/>
	<b>160 pontos</b>

**TOTAL** ..... 

---

**200 pontos**