Exame final nacional de Matemática A (2015, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Escolhendo os lugares das extremidades para os dois rapazes, existem 2 hipóteses correspondentes a uma troca entre os rapazes.
   Existem ainda ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para sentar as 4 raparigas nos 4 bancos, ou seja, 4 elementos organizados em 4 posições em que a ordem é relevante.
   Assim, o número de maneiras de sentar os 6 amigos é

   $$2 \times 4! = 48$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = P(B) - P(A \cap B)$ vem que $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

   Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

   $$P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

   $$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

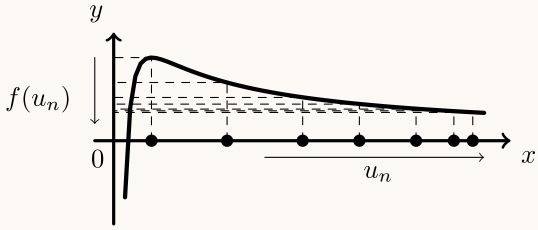
   $$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3(3^k) - \log_3 9 = k \times \log_3 3 - 2 = k - 2$$

   Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim u_n = \lim \left(n^2\right) = (+\infty)^2 = +\infty$, então

$$\lim f\left(u_n\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para zero, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

5. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1\,\alpha\,,\ \overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha\,,\ \overline{OB} = \cos\alpha \ \text{ e } \ \operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\overbrace{2 \times \operatorname{sen}\alpha \times \cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2 \times 2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

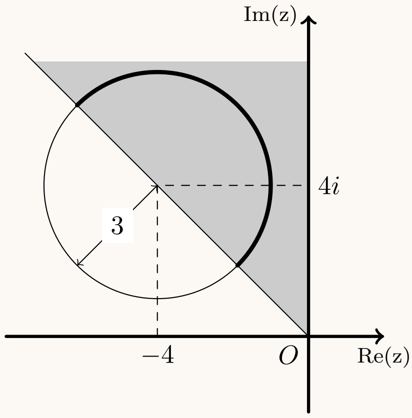
Resposta: **Opção B**

6. A linha é defina pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

- a circunferência de centro no afixo do número complexo $z = -4 + 4i$ e raio 3 ($|z + 4 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z - (4 + 4i)| = 3$)
- a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares $\left(\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\right)$

Assim, a linha definida pela conjunção é uma semicircunferência de raio 3, cujo comprimento C é o semiperímetro da circunferência de raio 3:

$$C = \frac{P_{\circ}}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 3\pi$$



Resposta: **Opção C**

7. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, temos que $C\hat{B}A = \frac{180}{3} = 60°$, ou seja a inclinação da reta AB é $60°$, pelo que o declive correspondente, m_{AB}, é

$$m_{AB} = \text{tg}(60°) = \sqrt{3}$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta AB é da forma

$$y = \sqrt{3}x + b$$

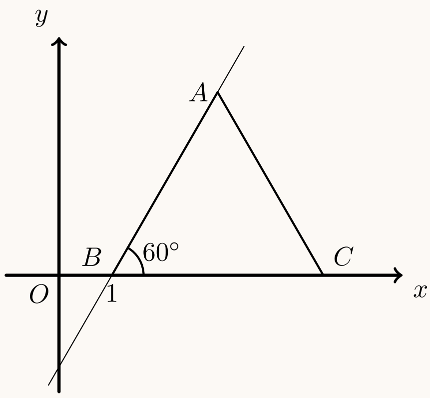
Como o ponto $A(1,0)$ pertence à reta, podemos calcular o valor de b, substituindo as coordenadas do ponto A na condição anterior:

$$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow -\sqrt{3} = b$$

Pelo que a equação reduzida da reta AB é

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção D**



8. Recorrendo à definição da sucessão (u_n) temos que

- $u_1 = a$
- $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
- $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Temos que $i^{19} = i^{4\times 4+3} = i^3 = -i$

   Pelo que, escrevendo o numerador da fração que define z na forma trigonométrica vem que

   $$-2+2i^{19} = -2+2(-i) = -2-2i = \rho\ cis\,\alpha$$

   Em que

   - $\rho = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   - $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-2}{-2} = 1$; como $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$, α é um ângulo do 3º quadrante, logo $\alpha = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

   Logo o numerador da fração que define z é $2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4}$, pelo que

   $$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\theta\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\theta\right)$$

   Como z é um imaginário puro se $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, vem que

   $$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

   Como $\theta \in]0,2\pi[$, podemos atribuir a k os valores do conjunto $\{-1,0\}$ e calcular os valores de θ, para os quais z é um imaginário puro:

   - Se $k=-1$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - (-1)\times\pi = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$
   - Se $k=0$, então $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - 0\times\pi = \dfrac{3\pi}{4}$

2.

   2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
   M:≪O funcionário ser mulher≫
   C:≪O funcionário residir em Coimbra≫
   Temos que $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}6$; $P(M) = P\left(\overline{M}\right)$ e $P\left(\overline{C}|\overline{M}\right) = 0{,}3$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
   - $P(M) = 1 - P\left(\overline{M}\right) \underset{P(M)=P\left(\overline{M}\right)}{\Leftrightarrow} P(M) = 1 - P(M) \Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow P(M) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 2P(M) = 1 \Leftrightarrow P(M) = 0{,}5$
   - $P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right) = P\left(\overline{M}\right)\times P\left(\overline{C}|\overline{M}\right) = 0{,}5\times 0{,}3 = 0{,}15$
   - $P\left(M\cap\overline{C}\right) = P\left(\overline{C}\right) - P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$
   - $P\left(M\cap C\right) = P(M) - P\left(\overline{D}\right) = 0{,}5 - 0{,}45 = 0{,}05$

	M	$\overline{M}$	
C	0,05		0,4
$\overline{C}$	0,45	0,15	0,6
	0,5	0,5	1

   Assim, calculando a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

   $$P\left(M|C\right) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

2.2. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

O número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 3 funcionários escolhidos de entre os 80, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{80}C_3$

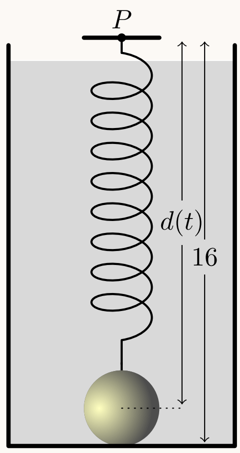
Como a empresa tem 80 funcionários, e 60% residem fora de Coimbra, então 40% residem em Coimbra, ou seja, $80 \times 0{,}4 = 32$ funcionários residem em Coimbra.
Assim, se ao número total de grupos de 3 funcionários (${}^{80}C_3$) subtrairmos o número de grupos formados por 3 funcionários que residem em Coimbra, escolhendo grupos de 3, de entre os 32 residentes em Coimbra, (${}^{32}C_3$), obtemos o número de grupos de 3 funcionários em que pelo menos um vive fora de Coimbra, ou seja, o número de grupos de 3 funcionários em que, no máximo 2 residem em Coimbra.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de escolher, ao caso, 3 funcionários da empresa, e entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a $\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$

3.

3.1. A distância do centro da esfera ao ponto P, no momento em que se inicia o movimento, em centímetros, é

$$d(0) = 10 + (5-0)e^{-0{,}05\times 0} = 10 + (5)e^0 = 10 + 5 \times 1 = 15$$



Como, , no momento em que se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm (do ponto P), o raio da esfera, em centímetros, é

$$r = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

Pelo que, calculando o volume da esfera em cm^3, e arredondado o resultado às centésimas, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$$

3.2. Para determinar o instante em que a distância é mínima, começamos por determinar a expressão da derivada da função d:

$$d'(t) = \left(10 + (5-t)e^{-0{,}05t}\right)' = (10)' + (5-t)' \times e^{-0{,}05t} + (5-t) \times (e^{-0{,}05t})' =$$
$$= 0 + (-1)e^{-0{,}05t} + (5-t) \times (-0{,}05t)'e^{-0{,}05t} = -e^{-0{,}05t} + (5-t) \times (-0{,}05e^{-0{,}05t}) =$$
$$= -e^{-0{,}05t} - 0{,}25e^{-0{,}05t} + 0{,}05te^{-0{,}05t} = e^{-0{,}05t}(-1 - 0{,}25 + 0{,}05t) = e^{-0{,}05t}(-1{,}25 + 0{,}05t)$$

Calculando os zeros da função derivada, com $t \geq 0$ vem:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}05t}(-1{,}25 + 0{,}05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}05t} = 0}_{\text{Eq.Imp.}} \vee -1{,}25 + 0{,}05t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}05t = 1{,}25 \Leftrightarrow t = \frac{1{,}25}{0{,}05} \Leftrightarrow t = 25$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		25		$+\infty$
d'	$-$	$-$	0	$+$	
d	15	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Assim, como a função d é decrescente no intervalo $]0{,}25]$ e crescente no intervalo $[25,+\infty[$ podemos concluir que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, quando $t = 25$, ou seja 25 segundos após se iniciar o movimento.

4.

4.1. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (porque ambos os ramos resultam de operações entre funções nos respetivos domínios em que estão definidos), então $x = \frac{1}{2}$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f

Para averiguar se a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$:

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left((x+1)\ln x\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\ln 1 - \ln 2) = -\frac{3\ln 2}{2}$
- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

(fazendo $y = x - \frac{1}{2}$, temos $x = y + \frac{1}{2}$; e se $x \to \frac{1}{2}^-$, então $y \to 0^-$)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2(y)} = \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y \times e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} =$$
$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^y - 1\right)}{2y} = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Assim, como $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$, são ambos números reais, concluímos que a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

4.2. Para determinar f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, começamos por determinar f' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f'(x)=\big((x+1)\ln x\big)'=(x+1)'\ln x+(x+1)(\ln x)'=(1+0)(\ln x)+(x+1)\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

Assim, vem que

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\left(\ln x+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)'=\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+(1)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}+0+\frac{(1)'(x)-1\times(x)'}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{0-1\times 1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Para determinar o sentido das concavidades em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, vamos estudar o sinal de f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f''(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{x-1}{x^2}=0\ \Leftrightarrow\ x-1=0\ \wedge\ \underbrace{x^2\neq 0}_{\text{P.V, pq.}x>\frac{1}{2}}\ \Leftrightarrow\ x=1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
f''	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos:

$$f(1)=(1+1)\ln 1=2\times 0=0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão de coordenadas $(1,0)$

4.3. Como, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas é uma função contínua neste intervalo, e, por isso, também é contínua em $[1,e]$, porque $[1,e] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Como $1 < 3 < e+1$, ou seja, $f(1) < 3 < f(e)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,e[$ tal que $f(c) = 3$, ou seja, que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1,e[$, ou seja, a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1,e[$

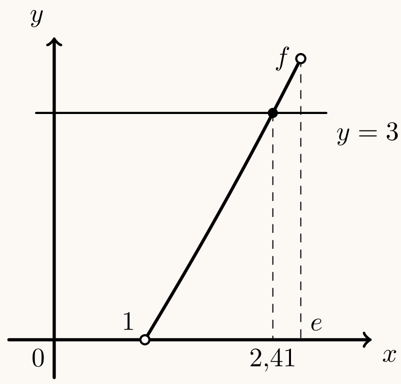
C.A.

$f(1) = (1+1)\ln 1 = 2 \times 0 = 0$

$f(e) = (e+1)\ln e = (e+1) \times 1 = e+1 \approx 3{,}72$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f, numa janela compatível com o intervalo $]1,e[$, e a reta $y = 3$ (reproduzidos na figura ao lado), podemos observar que a equação $f(x) = 3$ tem uma única solução no intervalo dado.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, ou seja, a solução da equação $f(x) = 3$, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é 2,41



5.

5.1. Pela observação da equação do plano α, temos que um vetor normal é $\vec{u} = (1,-2,1)$
Assim, um plano paralelo ao plano α, pode ser definido à custa de um qualquer vetor colinear com $\vec{u}$, e em particular, à custa do mesmo vetor, pelo que uma equação de um plano paralelo a α é

$$x - 2y + z + d = 0, \ (d \in \mathbb{R})$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto $A(0,0,2)$, substituindo as coordenadas do ponto A na expressão anterior, vem

$$0 - 2(0) + 2 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 2 = d \ \Leftrightarrow \ d = -2$$

pelo que uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α, é

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

5.2. O raio r, da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é igual a metade da distância entre os pontos A e B. Calculado a distância e depois o raio, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do diâmetro, ou seja

$$M_{[AB]} = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2,0,1)$$

pelo que, uma equação cartesiana da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \ \Leftrightarrow \ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

5.3. Como o ponto B tem de coordenadas $B(4{,}0{,}0)$, então de acordo com as indicações do enunciado, as coordenadas do ponto P, são $(4{,}b{,}0), b \in \mathbb{R}^+$ (abcissa 4 porque tem abcissa igual ao ponto B, e cota zero porque pertence ao eixo xOy).
Pelo que,

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (4{,}0{,}0) - (0{,}0{,}2) = (4{,}0, -2)$ e
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20}$$
- $\overrightarrow{AP} = P - A = (4{,}b{,}0) - (0{,}0{,}2) = (4{,}b, -2), b \in \mathbb{R}^+$ e
$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2 + b^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+b^2+4} = \sqrt{20+b^2}, b \in \mathbb{R}^+$$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = (4{,}0,-2).(4{,}b,-2) = 4\times 4 + 0\times b + (-2)\times(-2) = 16+0+4 = 20$

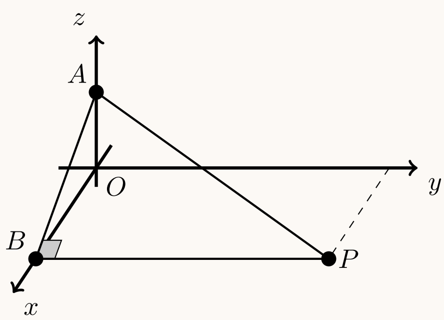
Temos ainda que o ângulo BAP é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e que
$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AP}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
Assim, recorrendo à definição de produto escalar, vem que:
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AP}\right)\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\sqrt{20+b^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{40}{\sqrt{20}} = \sqrt{20+b^2} \Rightarrow \left(\frac{40}{\sqrt{20}}\right)^2 = \left(\sqrt{20+b^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1600}{20} = 20+b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 80 = 20+b^2 \Leftrightarrow 80-20 = b^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{60} = b$$
Logo, como a ordenada do ponto P é positiva, temos que
$$b = \sqrt{60}$$

*** Outra resolução: ***

Como a o ponto P pertence ao plano xOy e tem a mesma abcissa, a reta BP é paralela ao eixo Oy, e perpendicular ao plano xOz, pelo que é ortogonal (ou perpendicular a todas as retas contidas no plano, em particular é perpendicular à reta AB

Assim, o ângulo ABP é reto, e o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B

Como $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$$



Como, $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ (ver cálculos no item anterior), e $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, temos que
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5}\times\sqrt{3} = \overline{BP} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} = \overline{BP}$$
Logo, como o ponto P tem ordenada positiva (e a mesma abcissa que o ponto B e pertence ao plano xOy), temos que as coordenadas do ponto P são $(4{,}y_P{,}0)$ e
$$y_P = 2\sqrt{15}$$

6. Temos que

- como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa a ($m_r = f'(a)$)
  Assim, temos

$$f'(x) = \big(1 - \cos(3x)\big)' = (1)' - \big(\cos(3x)\big)' = 0 - \big(-(3x)'\text{sen}\,(3x)\big) = 3\,\text{sen}\,(3x)$$

  pelo que $m_r = f'(a) = 3\,\text{sen}\,(3a)$

- como a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$, o declive da reta s é o valor da função derivada no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$ ($m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$) Assim, temos

$$g'(x) = \big(\text{sen}\,(3x)\big)' = \big((3x)'\cos(3x)\big) = 3\cos(3x)$$

  pelo que

$$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\cos\left(3a + \frac{3\pi}{6}\right) = 3\underbrace{\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\text{sen}\,(3a)} = -3\,\text{sen}\,(3a)$$

- como as retas r e s são perpendiculares, o declive de uma delas é o simétrico do inverso do declive da outra ($m_r = -\frac{1}{m_s}$)

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3\,\text{sen}\,(3a) = -\frac{1}{-3\,\text{sen}\,(3a)} \Leftrightarrow -3\,\text{sen}\,(3a) \times 3\,\text{sen}\,(3a) = -1 \Leftrightarrow -9\,\text{sen}^2\,(3a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\,\text{sen}^2\,(3a) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\,(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \text{sen}\,(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \text{sen}\,(3a) = \pm\frac{1}{3}$$

- como a é número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$ então

$$3 \times \frac{\pi}{3} < 3a < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

  ou seja, $3a$ é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante, pelo que $\text{sen}\,(3a) < 0$, logo

$$\text{sen}\,(3a) = -\frac{1}{3},\ q.e.d$$