

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

2017 - Época especial

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o número a formar deve ser maior que 20 000, então para o algarismo das dezenas de milhar existem apenas 3 escolhas possíveis (2, 3 e 4).

Para os restantes 4 posições do número existem 4 algarismos disponíveis (0 e 1 e os dois algarismos que não figuram na posição das dezenas de milhar), e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 4 posições existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $3 \times 4! = 72$ números.

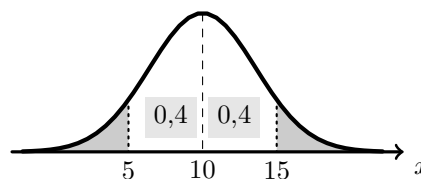
Resposta: **Opção C**

2. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio (10), temos que:

$$P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$$

e assim:

- $P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0,4$
- $P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) = 0,4 + 0,4 = 0,8$
- $P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0,8 = 0,2$



Resposta: **Opção B**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned} 4 + \log_a (5^{\ln a}) &= 4 + \ln a \times (\log_a 5) = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times (\log_a 5) = 4 + \frac{1 \times \log_a 5}{\log_a e} = \\ &= 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = 4 + \ln 5 = \ln(e^4) + \ln 5 = \ln(e^4 \times 5) = \ln(5e^4) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**



4. Pela observação do gráfico e considerando os elementos do enunciado, podemos identificar os intervalos em que a função é decrescente e o intervalo em que é crescente e relacionar com o sinal da primeira derivada função.

Da mesma forma, podemos identificar os intervalos em que a função tem concavidades diferentes e relacionar com o sinal da segunda derivada.

Organizando as informações anteriores e estudando o sinal do produto $f'(x) \times f''(x)$, na mesma tabela, vem:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	↗		Máx.	↘			Min.	↗	
$f'(x)$	+		0	-			0	+	
$f(x)$	⌒				Pt. I.	⌓			
$f''(x)$	-		-	-		0	+		+
$f'(x) \times f''(x)$	-		0	+		0	-		+

E assim, temos que o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$, é $[-2,0] \cup [2, +\infty[$

Resposta: **Opção A**

5. Usando a definição de função inversa e depois de função diferença, como $f(3) = 4$, vem que:

$$(f - g)^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow (f - g)(3) = 2 \Leftrightarrow f(3) - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - g(3) = 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = g(3) \Leftrightarrow 2 = g(3)$$

Resposta: **Opção B**

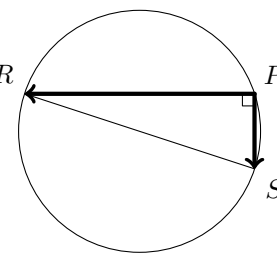
6. Como para qualquer ponto P da circunferência de diâmetro $[RS]$ o ângulo RPQ é reto, então para qualquer ponto P da circunferência, temos que:

$$\vec{PR} \cdot \vec{PS} = 0$$

Temos ainda que:

- para qualquer ponto P no interior da circunferência o ângulo RPQ é obtuso, vem que $\vec{PR} \cdot \vec{PS} > 0$
- para qualquer ponto P no exterior da circunferência o ângulo RPQ é agudo, vem que $\vec{PR} \cdot \vec{PS} < 0$

Desta forma, o conjunto A dos pontos P tais que $\vec{PR} \cdot \vec{PS} = 0$, é a circunferência de diâmetro $[RS]$

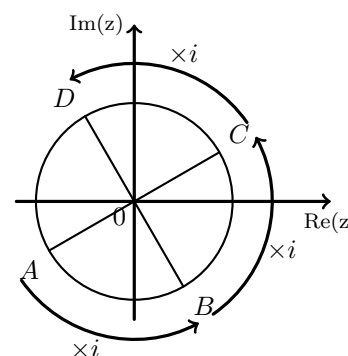


Resposta: **Opção D**

7. Como a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:

- B é a imagem geométrica de iz
- C é a imagem geométrica de $i \times i \times z = i^2 z$
- D é a imagem geométrica de $i \times i \times i \times z = i^3 z$

Resposta: **Opção D**



8. Como todos os termos da sucessão são positivos, $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e assim, vem que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona decrescente, pelo que é limitada superiormente pelo primeiro termo e como todos os termos são positivos, então é limitada inferiormente por zero, isto é:

$$0 < u_n \leq u_1$$

Isto é, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1. Escrevendo $1 - i$ na f.t. temos $1 - i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\rho = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\operatorname{cos} \alpha > 0$, α é um ângulo do 4º quadrante, logo $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Logo $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$, e por isso:

$$z_1 = \frac{1 - i}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

Desta forma, temos que:

- Como $|\bar{w}| = |w|$ e $\operatorname{Arg}(\bar{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$, então: $\bar{z}_1 = \operatorname{cis} \left(-\left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$
- $z_1^4 = 1^4 \operatorname{cis} \left(4 \times \left(-\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) = 1 \operatorname{cis} (-\pi - 4\theta) = \operatorname{cis} (-\pi - 4\theta)$

E assim, vem que:

$$\begin{aligned} w = \bar{z}_1 \times z_1^4 &= \left(\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right) \times \left(\operatorname{cis} (-\pi - 4\theta)\right) = (1 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta + (-\pi - 4\theta)\right) = \\ &= 1 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \theta - \pi - 4\theta\right) = \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4} - 3\theta\right) \end{aligned}$$

Pelo que, como $\theta \in \left] \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right[$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{12} > -3\theta > -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} > -\frac{3\pi}{4} - 3\theta > -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{4} > \operatorname{Arg}(w) > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Arg}(w) < -\pi \end{aligned}$$

Ou seja, a imagem geométrica de w é um ponto do segundo quadrante, e assim temos que:

- $\operatorname{Re}(w) < 0$
- $\operatorname{Im}(w) > 0$
- $|w| = 1$

Ou seja, o número complexo w pertence ao conjunto A



2.

- 2.1. No contexto do problema $P(B|\bar{A})$ é a probabilidade de retirar uma bola branca da caixa C_2 após terem sido lá colocadas duas bolas retiradas da caixa C_1 que não têm a mesma cor. Como é sabido que ocorre o acontecimento \bar{A} , ou seja, que as bolas retiradas da caixa C_1 não têm a mesma cor, então duas as bolas retiradas da caixa C_1 são uma preta e uma branca.

Como a caixa C_2 tem sete bolas antes da realização da experiência, e serão colocadas nesta caixa 2 bolas, a caixa C_2 ficará com 9 bolas, ou seja o número de casos possíveis é 9, pelo que o número de casos favoráveis é 6, porque o valor da probabilidade é $\frac{2}{3}$:

$$P(B|\bar{A}) = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$$

Assim, o número de casos favoráveis é 6, ou seja, existem 6 bolas brancas na caixa C_2 , num total de 9, ou seja, existem 3 bolas pretas na caixa C_2 .

Como foram lá colocadas 1 bola preta e 1 bola branca, inicialmente, na caixa C_2 existiam:

- $6 - 1 = 5$ bolas brancas
- $3 - 1 = 2$ bolas pretas

- 2.2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 6$ (repete-se esta experiência seis vezes).
- $p = \frac{5}{12}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «Sair bola branca» é $\frac{5}{12}$, porque existem 12 bolas na caixa das quais 5 são brancas)
- $q = \frac{7}{12}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

Assim, calculando a probabilidade de sair bola branca, pelo menos, duas vezes, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left({}^6 C_0 \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(\frac{7}{12}\right)^6 + {}^6 C_1 \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(\frac{7}{12}\right)^5 \right) = 1 - \left(\left(\frac{7}{12}\right)^6 + 6 \times \frac{5}{12} \left(\frac{7}{12}\right)^5 \right) \approx 0,79 \end{aligned}$$

3.

- 3.1. Como duas horas após o início do processo ($t = 2$), a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora ($t = 1$), então temos que $p(2) = \frac{p(1)}{2}$

Assim, resolvendo a equação anterior e escrevendo o valor de k forma solicitada, vem:

$$\begin{aligned} p(2) = \frac{p(1)}{2} &\Leftrightarrow 120 e^{-k \times 2} = \frac{120 e^{-k \times 1}}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \times 120}{120} = \frac{e^{-k}}{e^{-2k}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 = e^{-k - (-2k)} \Leftrightarrow 2 = e^{-k + 2k} \Leftrightarrow 2 = e^k \Leftrightarrow k = \ln 2 \end{aligned}$$



3.2. Calculando as imagens dos objetos 0 e 3, temos:

$$p(0) = 120 e^{-0,7 \times 0} = 120 e^0 = 120 \times 1 = 120$$

$$p(3) = 120 e^{-0,7 \times 3} = 120 e^{-2,1} \approx 14,69$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função p no intervalo $[0, 3]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[0,3]} = \frac{p(3) - p(0)}{3 - 0} \approx \frac{14,69 - 120}{3} \approx \frac{-105,31}{3} \approx -35$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que nas primeiras 3 horas do processo, a massa de poluente no tanque, decresceu, em média, 35 gramas por hora, aproximadamente.

4.

4.1. Para averiguar se a função f é contínua à esquerda no ponto de abscissa 1, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\text{sen}(x - 1)} = \frac{2(1^-) - 2}{\text{sen}(1^- - 1)} = \frac{2 - 2}{\text{sen} 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\text{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{\text{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\frac{\text{sen}(x - 1)}{x - 1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} 2}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x - 1)}{x - 1}} =$$

(fazendo $y = x - 1$, se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= \frac{2}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{-2x+4} + \ln(x - 1)) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+) - 1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) = -\infty$

A afirmação é verdadeira porque como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, a função é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1, e como $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ a função não é contínua à direita do mesmo ponto.



- 4.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} \right)' = \frac{(2x-2)' \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)' \cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2 \operatorname{sen}(x-1) - (2x-2) \cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

$$\begin{aligned} m &= f' \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{sen} \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right) - (2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2) \cos \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) - (2 - \frac{2\pi}{2} - 2) \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2(-1) - (-2\pi) \times 0}{(-1)^2} = \frac{-2-0}{1} = -2 \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -2x + b$

Como $f \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2}{\operatorname{sen} \left(1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \frac{2 - \pi - 2}{\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, sabemos que o ponto $P \left(1 - \frac{\pi}{2}, \pi \right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$\pi = -2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

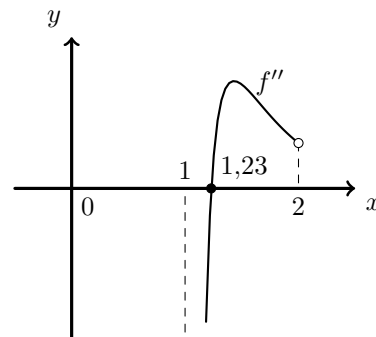
Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

- 4.3. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda deriva, para $x > 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-2x+4} + \ln(x-1))' = (e^{-2x+4})' + (\ln(x-1))' = \\ &= (-2x+4)' e^{-2x+4} + \frac{(x-1)'}{x-1} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1} \\ f''(x) &= (f'(x))' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1} \right)' = (-2e^{-2x+4})' + \left(\frac{1}{x-1} \right)' = \\ &= -2(e^{-2x+4})' + \frac{(1)'(x-1) - 1 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = -2 \times (-2x+4)' e^{-2x+4} + \frac{0 \times (x-1) - 1 \times 1}{(x-1)^2} = \\ &= -2 \times (-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

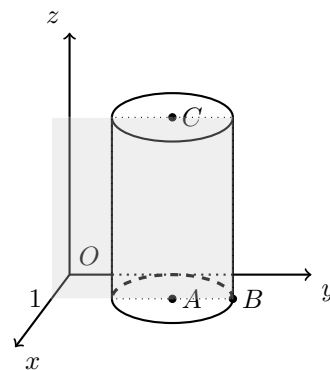
Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'' , para valores de $x \in]1, 2[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função $f''(x_0)$, ou seja, a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f : $x_0 \approx 1,23$



5.

- 5.1. Como os pontos A , B e C têm abscissa 1, todos pertencem ao plano de equação $x = 1$. Assim a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, é o retângulo que contém estes pontos, ou seja o retângulo cujos lados são o diâmetro da base (2) e a altura (3) do cilindro, pelo que a sua área é:

$$A = 2 \times 3 = 6$$



- 5.2. Como a base inferior do cilindro está contida no plano xOy então os centros das duas bases têm abscissas e ordenadas iguais. Como a cota do centro A é zero e a altura é 3, então as coordenadas do ponto C são $(1,2,3)$

Assim, calculando as coordenadas do vetor \overrightarrow{BC} , temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2,3) - (1,3,0) = (0, -1,3)$$

E assim, uma condição cartesiana que defina a reta com a direção do vetor \overrightarrow{BC} e que contenha o ponto B , ou seja, a reta BC , é:

$$x = 1 \wedge \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 0}{3} \Leftrightarrow x = 1 \wedge -y + 3 = \frac{z}{3}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz é o ponto da reta BC que tem ordenada nula, como todos os restantes pontos do plano xOz .

Assim, substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos calcular o valor da cota do ponto de intersecção:

$$x = 1 \vee -0 + 3 = \frac{z}{3} \Leftrightarrow x = 1 \wedge 3 \times 3 = z \Leftrightarrow x = 1 \wedge 9 = z$$

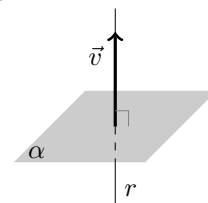
Ou seja as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz são $(1,0,9)$



5.3. Pela da condição que define a reta r , podemos identificar o respetivo vetor diretor:

$$x = y = 1 - z \Leftrightarrow \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

Assim, o vetor diretor da reta é o vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$, e observando que se o plano é perpendicular à reta r então um vetor normal do plano é o vetor diretor da reta, e assim a equação do plano α é da forma: $x + y - z = d$



E recorrendo às coordenadas do ponto A que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d , substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$1 + 2 - 0 = d \Leftrightarrow 3 = d$$

E assim, uma equação do plano α é $x + y - z = 3$

Como o ponto P pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada iguais a 2, podemos calcular a cota:

$$2 + 2 - z_P = 3 \Leftrightarrow 4 - 3 = z_P \Leftrightarrow 1 = z_P$$

E assim, como as coordenadas do ponto P são $(2, 2, 1)$, podemos calcular as coordenadas do vetor \vec{OP} , e a sua norma:

$$\vec{OP} = P - O = (2, 2, 1) - (0, 0, 0) = (2, 2, 1)$$

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

Como as coordenadas do ponto C são $(1, 2, 3)$, podemos calcular as coordenadas do vetor \vec{OC} , e a sua norma:

$$\vec{OC} = C - O = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$\|\vec{OC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{OP} \cdot \vec{OC}) = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OP}\| \times \|\vec{OC}\|} = \frac{(2, 2, 1) \cdot (1, 2, 3)}{3 \times \sqrt{14}} = \frac{2 + 4 + 3}{3\sqrt{14}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} = \frac{3 \times 3}{3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OPC , em graus, arredondado às unidades, é:

$$P\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$



6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto A tem coordenadas $(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$, porque o segmento $[OA]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\alpha + \alpha = 2\alpha$

Considerando o ponto P como o ponto da reta CD com ordenada igual à do ponto A , temos que:

- a base do triângulo é: $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
- a altura do triângulo é: $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha)$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned}
 A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times (\operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha))}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} \right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (- (1 - 2 \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos(2\alpha))}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2(2\alpha)}{2}
 \end{aligned}$$

