

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2017 - 1ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5, são constituídos por 3 algarismos ou posições, em que as três primeiras podem ser ocupada por 9 algarismos (todos exceto o zero), e a última apenas por 1 (o algarismo 5). Assim, o número de múltiplos de 5 nas condições do enunciado é

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 \times 1 = 9^3 = 729$$

Resposta: **Opção A**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:

V : «O aluno ter olhos verdes»

R : «O aluno é um rapaz»

Temos que $P(V|R) = \frac{1}{4}$ e $P(V \cap R) = \frac{1}{10}$

Assim, temos que:

$$P(R) = \frac{P(V \cap R)}{P(V|R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



Ou seja a probabilidade de escolher um aluno da turma e ele ser rapaz, ou seja, a proporção de rapazes relativamente ao total de alunos da turma é $\frac{2}{5}$. Como existem 20 alunos na turma o número de rapazes da turma é:

$$\frac{2}{5} \times 20 = \frac{40}{5} = 8$$

Resposta: **Opção B**



3. Por observação do gráfico de f , podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (porque o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abscissa zero).

x		0	
$f(x)$		Pt. I.	
$f''(x)$	-	0	+

Assim, temos que:

- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(-2) + f''(-1) > 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) + f''(-1) < 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) \times f''(-1) > 0$
- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(1) \times f''(2) > 0$

Resposta: **Opção D**

4. Como o declive da assíntota do gráfico de f é -1 , e o domínio de f é \mathbb{R}^+ , temos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como $y = -x$ é assíntota do gráfico de g , e o domínio de g é \mathbb{R}^+ , temos que:

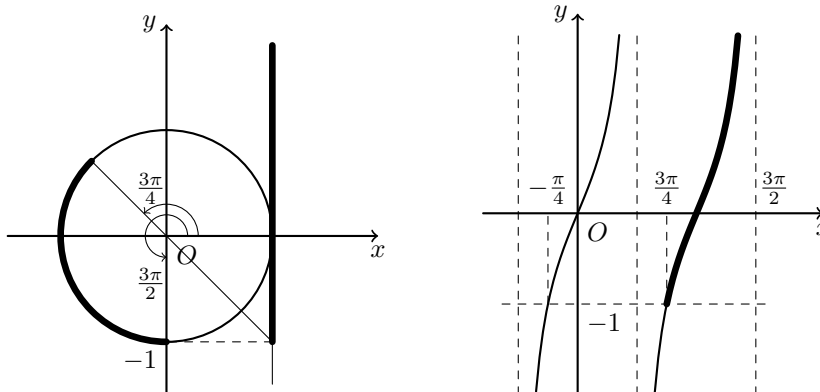
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

5. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo $[-1, +\infty[$, e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo é $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$



Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função $\text{tg}(x)$ com a restrição ao domínio $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$ assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**



6. Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm 2$$

Como $\cos \alpha < 0$, então a reta tem declive negativo.

Assim, como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \operatorname{tg} \alpha$), temos que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, ou seja a reta tem declive -2 , pelo que, de entre as opções apresentadas a reta de equação $y = -2x$ é a única, cuja inclinação α , verifica a condição $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Resposta: **Opção C**

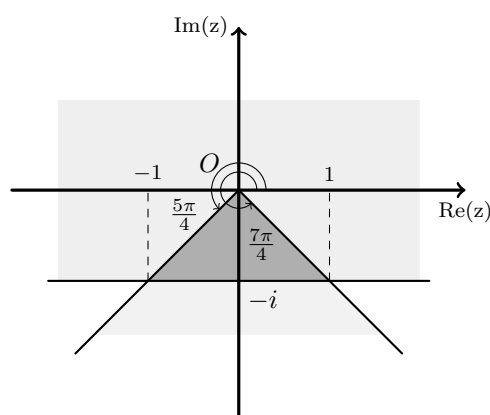
7. A região é definida pela conjunção de duas condições, cujas representações gráficas no plano complexo são:

- a região dos 3º e 4º quadrantes limitada pelas bissetrizes destes quadrantes $\left(\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4}\right)$
- o semiplano acima da reta horizontal definida por $\operatorname{Im}(z) \geq -1$

Assim, a região definida pela conjunção é um triângulo, cujos vértices são a origem e os pontos de coordenadas $(-1, -1)$ e $(1, -1)$, ou seja, a medida da base é 2 e da altura é 1, pelo que, a área (A_{Δ}) é:

$$A_{\Delta} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta: **Opção D**



8. Observando a expressão da sucessão, temos que:

- Para $n \leq 20$, os termos da sucessão são iguais aos valores da ordem, ou seja, $1 \leq u_n \leq 20$
- Para $n > 20$, os termos da sucessão são iguais a 1, ou -1 , pelo que $-1 \leq u_n \leq 1$

Assim, para qualquer valor de n , temos que $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção C**



GRUPO II

1. Simplificando as expressões de z_1 e z_2 , temos que:

- Como $i^{19} = i^{4 \times 4 + 3} = i^3 = -i$, vem que:

$$z_1 = \frac{1 - 3i^{19}}{1 + i} = \frac{1 - 3(-i)}{1 + i} = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + 3i - 3i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 2i - 3(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

- Como $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$, vem que:

$$z_2 = -3k \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3k(-i) = 3ik$$

Assim, como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$, ou seja:

$$|z_1 - z_2| = |2 + i - 3ik| = |2 + i(1 - 3k)| = \sqrt{2^2 + (1 - 3k)^2} = \sqrt{4 + 1 - 6k + 9k^2} = \sqrt{9k^2 - 6k + 5}$$

E como a distância entre as imagens geométricas de z_1 e de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, temos que:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow \sqrt{9k^2 - 6k + 5} = \sqrt{5} \underset{k > 0}{\Rightarrow} \left(\sqrt{9k^2 - 6k + 5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 - 5 = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k = 0 \Leftrightarrow k(9k - 6) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 9k - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9} \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

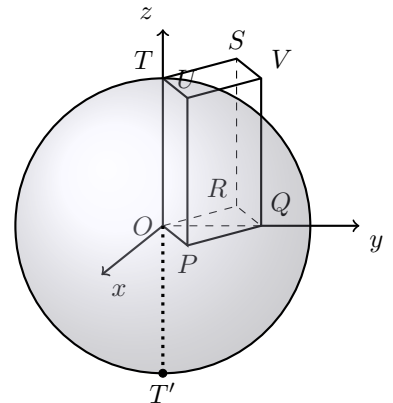
Como $k \in \mathbb{R}^+$, temos que $k = \frac{2}{3}$

2.

- 2.1. Como o ponto T pertence ao eixo Oz tem abscissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$, suas coordenadas são $(0,0,3)$. Assim, o ponto T' simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem de coordenadas $(0,0,-3)$.

Assim temos que o centro da superfície esférica é o ponto médio do diâmetro $[TT']$, ou seja, a origem do referencial (como se pretende ilustrar na figura ao lado), e o raio é a distância do ponto T ao centro, ou seja, 3, pelo que a equação da superfície esférica é:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

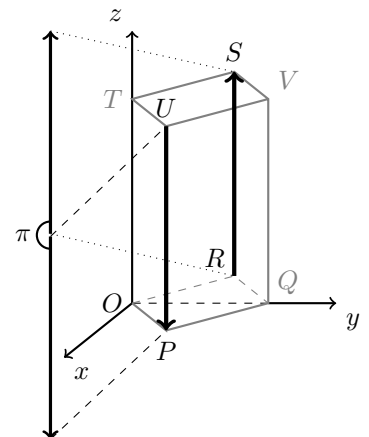


- 2.2. Como as arestas $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma, logo são paralelas, e ambas têm comprimento igual a 3.

Assim, como os vetores \vec{UP} e \vec{RS} têm a mesma direção e sentidos contrários, pelo que o ângulo por eles formado tem amplitude de π radianos.

Desta forma, o valor do produto escalar $\vec{UP} \cdot \vec{RS}$ é:

$$\begin{aligned} \vec{UP} \cdot \vec{RS} &= \|\vec{UP}\| \times \|\vec{RS}\| \times \cos(\vec{UP} \wedge \vec{RS}) = \\ &= 3 \times 3 \times \cos \pi = 9 \times (-1) = -9 \end{aligned}$$



- 2.3. Como o ponto Q pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, e como pertence ao plano PQV de equação $x + y = 2$, substituindo o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada:

$$0 + y_Q = 2 \Leftrightarrow y_Q = 2$$

Assim, verificando que o ponto T tem coordenadas $(0,0,3)$, calculamos as coordenadas do vetor \overrightarrow{TQ} :

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0,2,0) - (0,0,3) = (0,2,-3)$$

Assim, considerando \overrightarrow{TQ} é um vetor diretor da reta TQ e que o ponto Q pertence à reta, temos que uma condição cartesiana da reta é:

$$x = 0 \wedge \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-3} \Leftrightarrow x = 0 \wedge \frac{y-2}{2} = -\frac{z}{3}$$

- 2.4. Como o prisma tem 8 vértices, o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos (número de casos possíveis) é 8C_3

De entre os 8C_3 conjuntos de 3 vértices, os que definem planos perpendiculares ao plano xOy deve conter uma aresta perpendicular a este plano.

Como existem 4 arestas nestas condições (ou seja 4 pares de vértices), e por cada uma delas qualquer um dos restantes 6 vértices, define com a aresta um plano perpendicular ao plano xOy , então existem 4×6 casos favoráveis.

Desta forma, a probabilidade é:

$$\frac{4 \times 6}{{}^8C_3} = \frac{24}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$$

3. Temos que $P(\overline{A \cup B})$, no contexto da situação descrita é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco e o número dessa bola ser superior a 6 ou par.

Como consideramos que o saco tem n bolas, existem $n - 6$ bolas com um número superior a 6, e ainda 3 bolas com número par, mas inferior a 6 (as bolas com os números 2, 4 e 6).

Desta forma o número de casos possíveis é n , porque existem n bolas no saco e o número de casos favoráveis é $n - 6 + 3 = n - 3$, e desta forma, recorrendo à Regra de LaPlace, temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = \frac{n-3}{n}$$

4.

- 4.1. Temos que $f(0) = 9 - 2,5(e^{1-0,2 \times 0} + e^{0,2 \times 0-1}) = 9 - 2,5(e^1 + e^{-1}) \approx 1,28$

E assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\begin{aligned} \sqrt{1,28^2 + x^2} = 2 &\Leftrightarrow_{1,28^2+x^2>0} \left(\sqrt{1,28^2 + x^2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow_{1,28^2+x^2>0} 1,28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1,28^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2,3616 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2,3616} \end{aligned}$$

Como $x \in [0,7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2,3616} \approx 1,5$

Como $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$, e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{f(0)^2 + x^2}$ é a distância \overline{SP} .

Assim a solução da equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$ é a abcissa do ponto S , na posição em que dista duas unidades do ponto P , ou seja, o ponto da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta a ponte está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.



4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})\right)' = (9)' - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})' = \\ &= 0 - 2,5\left((e^{1-0,2x})' + (e^{0,2x-1})'\right) = -2,5\left((1-0,2x)'(e^{1-0,2x}) + (0,2x-1)'(e^{0,2x-1})\right) = \\ &= -2,5\left(-0,2(e^{1-0,2x}) + 0,2(e^{0,2x-1})\right) = -2,5 \times 0,2(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = \\ &= -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0,7])$, vem:

$$\begin{aligned} -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = 0 &\Leftrightarrow -e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0,2x-1} = e^{1-0,2x} \Leftrightarrow \\ 0,2x - 1 = 1 - 0,2x &\Leftrightarrow 0,2x + 0,2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0,4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	min	\nearrow	Máx	\searrow	min

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2,5(e^{1-0,2 \times 5} + e^{0,2 \times 5 - 1}) = 9 - 2,5(e^{1-1} + e^{1-1}) = 9 - 2,5(e^0 + e^0) = 9 - 2,5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

5.

5.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

- $g(1) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \frac{1-(1^-)^2}{1-e^{1-1^-}} = \frac{1-1}{1-e^0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-1}{e^{x-1}-1} \times (x+1) \right) =$$

(fazendo $y = x - 1$ temos que se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

Lim. Notável

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = 3 + \frac{\text{sen}(1-1)}{1-1} = 3 - \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} = 3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}} = 3 - 1 = 2$$

Lim. Notável

Como $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$



5.2. Resolvendo a equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$, ou seja, para $x > 1$, vem:

$$3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 3 - 3 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 0 \quad (x \neq 1) \Leftrightarrow \sin(x-1) = 0 \times (1-x) \Leftrightarrow \sin(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-1) = \sin 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como $\pi \notin [4,5]$; $1 + \pi \in [4,5]$ e $1 + 2\pi \notin [4,5]$ a única solução da equação $g(x) = 3$, no intervalo $[4,5]$ é $1 + \pi$

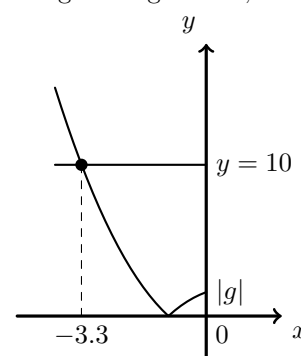
5.3. Como o ponto A é o ponto de abscissa negativa ($x < 1$) que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abscissas, tem ordenada nula, e assim, calculamos a abscissa resolvendo a equação:

$$\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow_{x < 0} x = -1$$

Assim, temos que $\overline{OA} = |-1| = 1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P , pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

$$\frac{\overline{OA} \times |g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow 1 \times |g(x)| = 5 \times 2 \Leftrightarrow |g(x)| = 10 \Leftrightarrow \left| \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} \right| = 10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|g|$, para valores inferiores a zero e a reta $y = 10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de intersecção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abscissa do ponto P , $x_P \approx -3,3$



6. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

Como as coordenadas do ponto P são $(a, f(a))$ e as do ponto Q são $(2a, 0)$, temos que o declive da reta PQ , é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a , então o declive da reta r , ou seja, da reta PQ , é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$

